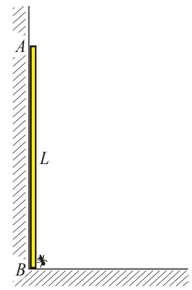
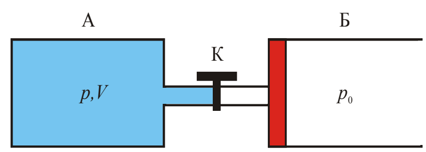
Друштво физичара Србије
Министарство просвете и спорта Републике Србије
Републичко такмичење из физике ученика средњих школа школске 2005/2006.
II разред



1. У углу собе, наслоњен на зид, стоји штап AB дужине L, и на његовом доњем крају B, који је наслоњен на под, налази се мрав занемарљивих димензија у односу на штап (види слику). У тренутку када штап почиње да клизи, и његов крај B почне да се креће константном брзином v, мрав почиње да се пење уз штап брзином $u=const.$ у односу на штап. На коју максималну висину h_{max} у односу на под ће се попети мрав током свог кретања уз штап, ако се крајеви штапа A и B током кретања не одвајају од зида, односно пода. Израчунајте h_{max} у случају: а) $u = v$ и б) $u = 2v$. (20 п)

2. Два цилиндра А и Б спојена су капиларом са славином К (види слику). Цилиндар А има запремину V и потпуно је затворен, а у њему се налази ν = 3 mol једноатомског идеалног гаса на притиску $p = 3\ p_0$. Цилиндар Б је отворен са једног краја, и у њему је клип који може да клизи дуж цилиндра без трења. У почетном тренутку се клип налази приљубљен уз доњи део цилиндра ближи цевчици са славином (као на слици). Затим славину К отворимо тако да полако дође до преласка дела гаса из цилиндра А у цилиндар Б, при чему се и клип цилиндра Б доста споро одвоји од његовог доњег дела. Између гасова у цилиндрима, који се стално налазе на константној температури T_0 = 300 K, и спољашње средине долази до размене топлоте.



а) Колико износи однос запремине V' гаса у цилиндру Б и запремине V гаса у цилиндру А по достизању равнотежног стања?

б) Колико ће молова гаса ν_x прећи из цилиндра А у цилиндар Б до тренутка када се достигне равнотежно стање?

в) Колики је рад A који изврши гас и колика је количина топлоте Q коју гас размени са спољашњом средином до достизања равнотежног стања?

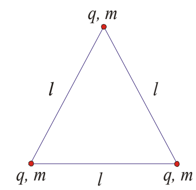
г) Израчунати укупну промену ентропије ΔS околине.

Узети да је $p_0 = 10^5$ Pa, а R = 8,3 J/(mol K). (20 п)

3. Колики минималан рад се мора извршити да би капљицу живе масе m = 20 g „угурали“ у стаклену капилару унутрашњег пречника d = 1 mm? Колико ће бити дугачак стуб живе у таквој капилари? Узети да је густина живе 14 пута већа од густине воде ($\rho_{H2O} = 10^3$ kg/m^3), а коефицијент површинског напона живе је γ = 0,5 J/m^2. Жива не кваси стакло. (15 п)

4. Танка епрувета је делимично напуњена водом и постављена вертикално тако да својим горњим отвореним крајем буде изложена дејству атмосферског притиска. Услед дифузије се у епрувети успостави линеарна промена концентрације водене паре са висином: у близини површине воде водена пара је засићена, а при врху отвореног краја епрувете њена концентрација је два пута мања. Епрувету при врху затворимо непропусним поклопцем. По успостављању равнотеже ваздух у епрувети се равномерно распоређује по висини (његова укупна маса остаје иста), а пара по читавој запремини постаје засићена. Густине сувог атмосферског ваздуха ван епрувете и влажног ваздуха у епрувети разликују се, по апсолутној вредности, за 5 g/m^3. Уколико се читав процес одвија на сталној температури од t = 27 °C, а) да ли је густина влажног ваздуха у епрувети већа или мања од густине сувог атмосферског ваздуха ван епрувете?; б) израчунајте притисак засићене паре у епрувети. Моларна маса ваздуха износи M_V = 29 g/mol, моларна маса воде износи M_{H2O} = 18 g/mol, а универзална гасна константа износи R = 8,31 J/(mol K). Промену нивоа воде у току успостављања равнотеже занемарити. Све гасне смеше сматрати идеалним. (20 п)

5. Три мале идентичне куглице исте масе m = 1,5 g и истог наелектрисања q, налазе се на глаткој хоризонталној подлози, и повезане су међусобно нерастегљивим и непроводним нитима, свака дужине l (види слику). Све три нити истовремено прекинемо. Мерено је убрзање a куглица одмах након прекидања нити у зависности од количине наелектрисања q на њима, уз услов да је увек $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Резултати мерења убрзања a једне од куглица, у зависности од наелектрисања куглица q, дати су у табели



a [m/s^2]	1	3	5	7	9	11
q [10^{-8} C]	0,9	1,6	2,1	2,5	2,8	3,1

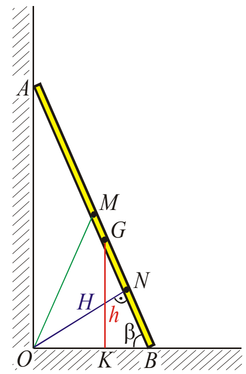
уз Δa = 0,1 m/s^2 и $\Delta q = 1 \times 10^{-9}$ C. Помоћу одговарајућег линеарног графика израчунати дужину нити l, и одговарајуће грешке мерења, сматрајући да је Δm = 0. Приликом израчунавања узети да је $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \times 10^9$ m/F. (25 п)

Задатке припремио: др Драган Маркушев, Институт за физику, Београд-Земун
Рецензент: др Мићо Митровић, Физички факултет, Београд
Председник Комисије: др Мићо Митровић, Физички факултет, Београд

Решење задатака за републичко такмичење школске 2005/2006.

P1. Означимо са G могући положај мрава на штапу (види слику), са M средину штапа, са $GK = h$ висину мрава изнад пода, а са $ON = H$ најмање растојање штапа од угла собе O. Нека је t укупно време кретања мрава. Тада је $OB = vt$, $BG = ut$, $AM = OM = L/2$. Троуглови ONB и GKB су слични правоугли троуглови са заједничким углом β, па важи однос

$$\frac{GK}{ON} = \frac{BG}{OB}, \text{ или } \frac{h}{H} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$



одакле је

$$h = H\frac{u}{v}.$$

У правоуглом троуглу OMN катета $ON = H$ је мања или једнака хипотенузи $OM = L/2$, при чему једнакост достижу при $\beta = 45^{\circ}$. Следи да је

$$h_{\max} = H_{\max}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}\frac{u}{v}.$$

Овај резултат је исправан ако за време $t_{\max} = (L\cos 45^{\circ})/v$ мрав не успе да дође до горњег краја штапа, тј. ако је $ut_{\max} < L$, што је еквивалентно неједначини $u \le v\sqrt{2}$. У противном, висина h ће бити максимална у тренутку $t'_{\max} = L/u$ када мрав стигне у тачку А:

$$h'_{\max} = \sqrt{L^2 - \left(vt'_{\max}\right)^2} = L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2}.$$

а) За случај $u = v$ користимо

$$h_{\max} = H_{\max}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}.$$

а) За случај $u = 2v$ користимо

$$h'_{\max} = \sqrt{L^2 - \left(vt'_{\max}\right)^2} = L\sqrt{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2} = L\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

P2. а) Пошто се ширење врши при изотермском процесу, онда је

$$pV = p_0(V + V') \Rightarrow p = p_0\left(1 + \frac{V'}{V}\right),$$

а одатле је

$$\frac{V'}{V} = \frac{p}{p_0} - 1 = 2.$$

б) Да би пронашли непознати број молова ν_x напишимо једначине за почетно и крајње стање гаса у цилиндру А:

$$pV = \nu RT_0, \;\; p_0V = (\nu - \nu_x)RT_0,$$

одакле следи да је

$$\nu_x = \nu\left(1 - \frac{p_0}{p}\right) = \frac{2}{3}\nu = 2\,\text{mol}.$$

в) Рад гаса при ширењу једнак је

$$A = p_0V',$$

или

$$A = (p - p_0)V = pV\frac{\nu_x}{\nu} = \nu_x RT_0 = 4{,}986 \times 10^3\ \text{J},$$

тј. гас при ширењу врши рад над спољашњом средином. Пошто је процес изотермски, унутрашња енергија идеалног гаса се не мења, па је сва енергија коју је гас утрошио да би извршио рад A једнака количини топлоте Q коју је гас добио од спољашње средине. На основу закона одржања енергије

$$Q = A = \nu_x RT_0 = 4{,}986 \times 10^3\ \text{J}.$$

г) Пошто се из окружујуће средине гасу преда количина топлоте Q, онда се количина топлоте окружујуће средине смањила за – Q, па је њена промена ентропије

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_0} = -\nu_x R = -16{,}62\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

тј. ентропија се смањује.

P3. Приликом стављања капи живе у тако танку капилару површина капи се значајно повећа. Укупан рад који ће се утрошити на „гурање“ капи у капилару може се добити уз помоћ различитих површина живе. Запремина капи износи

$$V = \frac{m}{n\rho_{H2O}} = 1{,}4\ \mathrm{cm}^3 \ ,$$

а површина коју она има једнака је, уз $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = 6\ \mathrm{cm}^2 \ .$$

Нова површина живе у капилари износи, уз $V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l$,

$$S_2 = \pi d l = \frac{4V}{d} = 56\ \mathrm{cm}^2$$

(то је површина бокова цилиндра исте запремине V као и кап). Тада ће неопходан рад бити једнак

$$A = \gamma\Delta S = \gamma(S_2 - S_1) = 2{,}5\times10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

Дужина стуба живе у капилари износи

$$l = \frac{S_2}{\pi d} = 1{,}78\ \mathrm{m}\ .$$

P4. Док је епрувета отворена, укупан притисак ваздуха и паре у произвољној тачки дела епрувете изнад површине воде једнак је атмосферском притиску p_0. Парцијални притисак ваздуха у епрувети, као и притисак паре, мења се по линеарном закону: једнак је $p_0 - p_1$ на површини воде, и $p_0 - p_1/2$ на крају отвореног дела епрувете (p_1 је тражени притисак засићене паре). Очигледно је средњи (по висини) притисак ваздуха у епрувети једнак

$$< p > = \frac{(p_0 - p_1) + \left(p_0 - \frac{p_1}{2}\right)}{2} = p_0 - \frac{3}{4}p_1.$$

Масу ваздуха у епрувети ћемо наћи уз помоћ једначине стања идеалног гаса:

$$m_V = \frac{M_V < p > V}{RT},$$

где је V запремина ваздуха у епрувети. По услову задатка, после затварања епрувете ваздух ће се равномерно распоредити по висини (његова укупна маса остаје иста), док ће пара по читавој запремини бити засићена.
Маса паре у затвореној епрувети износи

$$m_1 = \frac{M_{\mathrm{H_2O}} p_1}{RT} V,$$

а) Густина влажног ваздуха једнака је

$$\rho_{\mathrm{VV}} = \frac{m_{\mathrm{V}} + m_1}{V} = \frac{M_{\mathrm{V}} < p > + M_{\mathrm{H_2O}} p_1}{RT} = \frac{M_{\mathrm{V}}\left(p_0 - \frac{3}{4} p_1\right) + M_{\mathrm{H_2O}} p_1}{RT}.$$

Густина сувог атмосферског ваздуха износи

$$\rho_{\mathrm{SV}} = \frac{M_{\mathrm{V}} p_0}{RT}.$$

Разлика тих густина једнака је

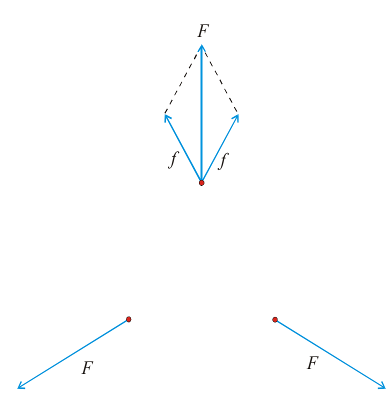
$$\Delta\rho = \rho_{\mathrm{SV}} - \rho_{\mathrm{VV}} = \frac{\left(\frac{3}{4} M_{\mathrm{V}} - M_{\mathrm{H_2O}}\right) p_1}{RT}.$$

Због тога што су у претходној једначини p_1, R и T позитивне величине (> 0), онда је за $\left(\frac{3}{4} M_{\mathrm{V}} - M_{\mathrm{H_2O}}\right) > 0 \Rightarrow \rho_{\mathrm{SV}} > \rho_{\mathrm{VV}}$ а за $\left(\frac{3}{4} M_{\mathrm{V}} - M_{\mathrm{H_2O}}\right) < 0 \Rightarrow \rho_{\mathrm{SV}} < \rho_{\mathrm{VV}}$. По услову задатка, заменом бројних вредности за моларне масе ваздуха и воде, закључујемо да је густина сувог атмосферског ваздуха изван епрувете већа од густине влажног ваздуха у епрувети тј. $\rho_{\mathrm{SV}} > \rho_{\mathrm{VV}}$.

б) Притисак засићене паре налазимо из претходне једначине:

$$p_1 = \frac{4\Delta\rho RT}{3M_{\mathrm{V}} - 4M_{\mathrm{H_2O}}} = 3{,}324 \times 10^3\,\mathrm{Pa}.$$

P5. По прекидању нити на куглице делују само електростатичке силе. Због симетрије система, резултујуће силе које делују на куглице биће једнаке по апсолутној вредности, а усмерене под углом од 120° једна у односу на другу (види слику). Са слике је јасно да је



$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \quad F = \sqrt{3} \cdot f = \frac{\sqrt{3} \cdot q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

Убрзање сваке куглице посебно биће једнако

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{3} \cdot q^2}{4\pi\varepsilon_0 m l^2}.$$

На основу последњег резултата и поставке задатка видимо да постоји линеарна веза између убрзања сваке од куглица a и квадрата наелектрисања куглица q^2. Сада можемо да формирамо следећу табелу

a / [m/s^2]	1	3	5	7	9	11
q / [10^{-8} C]	0,9	1,6	2,1	2,5	2,8	3,1
q^2 / [10^{-16} C^2]	0,8 ±0,2	2,6 ±0,3	4,4 ±0,4	6,2 ±0,5	7,8 ±0,6	9,6 ±0,6

уз Δa = 0,1 m/s^2, $\Delta q = 1 \times 10^{-9}$ C и $\frac{\Delta q^2}{q^2} = 2\left(\frac{\Delta q}{q}\right)$.

На основу графика $q^2 = f(a)$ узмемо две тачке са праве. Прву тачку узимамо између прве две A(1,75 × 10^{-16} C^2, 2 m/s^2), а другу између последње две експерименталне тачке B(8,75 × 10^{-16} C^2, 10 m/s^2). На основу њих добијамо коефицијент правца праве

$$k = \frac{q_2^2 - q_1^2}{a_2 - a_1} = \frac{(8{,}75 - 1{,}75)}{(10 - 2)} 10^{-16} \frac{\mathrm{C^2 s^2}}{\mathrm{m}} = 8{,}75 \times 10^{-17} \frac{\mathrm{C^2 s^2}}{\mathrm{m}}.$$

Грешка коефицијента правца износи

$$\Delta k = k\left(\frac{\Delta q_1^2 + \Delta q_2^2}{q_2^2 - q_1^2} + \frac{\Delta a_1 + \Delta a_1}{a_2 - a_1}\right) = 0{,}875 \times 10^{-16} \frac{\mathrm{C^2 s^2}}{\mathrm{m}} \left(\frac{0{,}3 + 0{,}6}{7} + \frac{0{,}1 + 0{,}1}{8}\right) = 1{,}34 \times 10^{-17} \frac{\mathrm{C^2 s^2}}{\mathrm{m}}.$$

Сада је

$$k = (8{,}8 \pm 1{,}3) \times 10^{-17} \frac{\mathrm{C^2 s^2}}{\mathrm{m}}$$

На основу

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{3} \cdot q^2}{4\pi\varepsilon_0 m l^2} = \frac{1}{k} q^2,$$

можемо да пишемо да је

$$k = \frac{4\pi\varepsilon_0 m l^2}{\sqrt{3}},$$

па је квадрат растојања

$$l^2 = \frac{k\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 m} = 9{,}1452\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2,$$

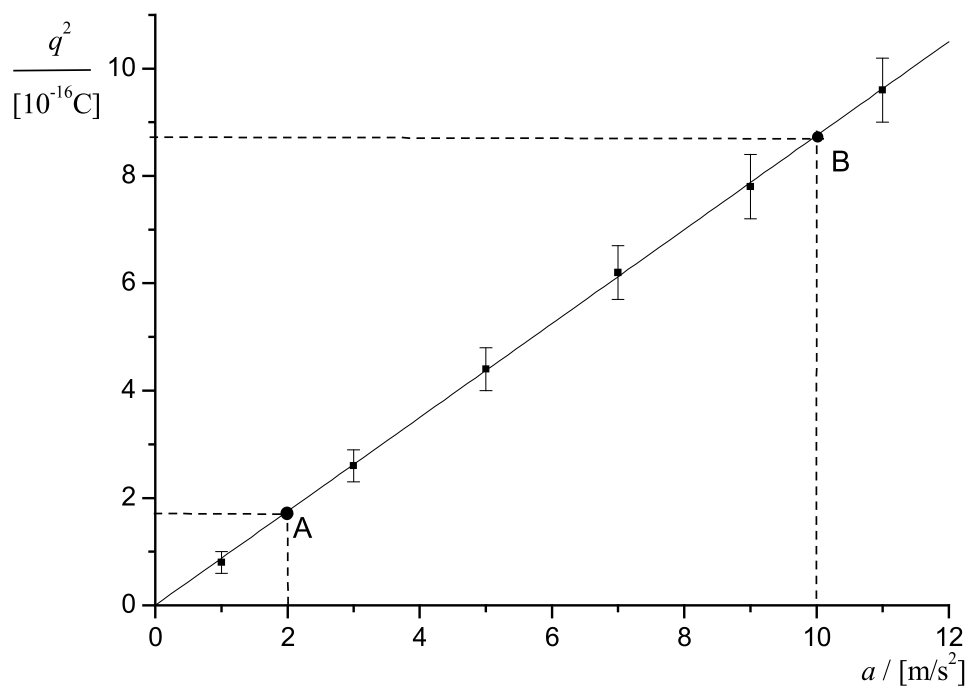
а тражено растојање је $l = 3{,}02\times10^{-2}\,\mathrm{m}$.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2}\frac{\Delta k}{k} = 7{,}39\%\text{ , тј. } \Delta l = 2{,}22\times10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

па је на крају

$$l = (3{,}0 \pm 0{,}2)\times10^{-2}\,\mathrm{m}\,.$$

График зависности квадрата наелектрисања q^2 од убрзања куглице a



***