Друштво физичара Србије
Министарство просвете и спорта Републике Србије
Републичко такмичење из физике ученика средњих школа школске 2005/2006.
IV разред

1. (30п) Проводни електрони у металима се у основној апроксимацији понашају као независне и слободне честице. Спин електрона је $s = 1/2$, те за њих вреди Пулијев принцип забране. Стога се у сваком стању, специфицираном нпр. вредностима три компоненте p_x, p_y, p_z импулса електрона, могу наћи највише два електрона који се разликују по пројекцији спина на правац свог кретања. Расподела електрона по енергијама у металу на температури 0K је таква да су сви нивои попуњени почев од најнижег. Задњи попуњени ниво, односно ниво на којем још има електрона на апсолутној нули, је Фермијев ниво. Крајњи циљ задатка је да се одреди Фермијев ниво, као и енергија и притисак проводних електрона на температури 0K.

а) Таласна функција $\Psi(x)$ честице која врши једно-димензионално кретање и која има импулс p се добија као решење једначине

$$-i\hbar\frac{d\Psi}{dx} = p\Psi. \tag{1}$$

У једначини (1), i је имагинарна јединица, а $\hbar = h/2\pi$ где је $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Js Планкова константа. Користећи Ојлерову формулу $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, показати да у овом случају таласна функција има облик $\Psi(x) = Ae^{ipx/\hbar}$. Имајући у виду услов нормираности таласне функције $\int_0^L |\Psi(x)|^2 dx = 1$, наћи константу A, и тако у потпуности наћи таласну функцију за честицу импулса p, чија x- координата лежи у интервалу $[0, L]$.

б) Наћи дозвољене вредности импулса p, тј. дискретан низ вредности p_m(које пребројава цео број $-\infty < m < +\infty$), при којима је $\Psi(0) = \Psi(L)$ за таласне функције $\Psi(x)$ које задовољавају једначину (1).

в) За честице које врше тро-димензионално кретање унутар коцке запремине V, све три компоненте импулса p_x, p_y, p_z независно узимају једну од дозвољених вредности импулса нађених у б). Наћи број ΔN електрона чији интензитет импулса $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ лежи у сферном слоју $(p, p + \Delta p)$. Водити рачуна о Паулијевом принципу забране.

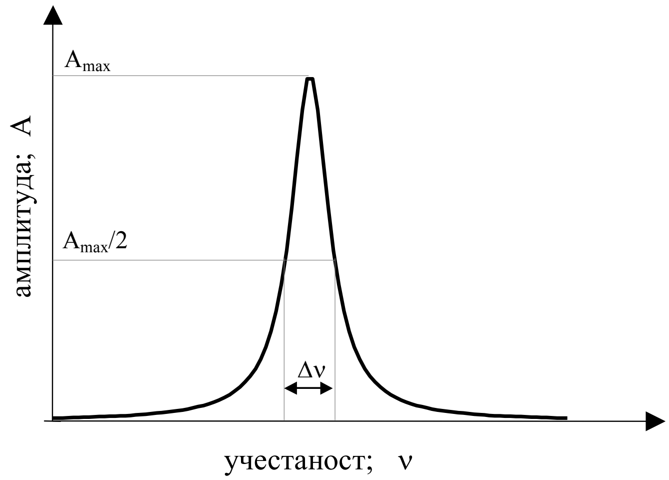
г) Наћи Фермијев ниво E_F знајући да је енергија слободног електрона $E = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_e}$.

д) Наћи израз за енергију E и притисак P проводних електрона на температури 0K. Изразити енергију у облику $E = const_E \cdot E_F \cdot N$, а притисак у облику $P = const_P \cdot E_F \cdot n$; N је број, а n концентрација проводних електрона.

ђ) Израчунати E_F (у eV) и P (у GPa) за литијум, узимајући да сваки литијумов атом даје по један проводни електрон. Густина литијума је ρ = 534 kg/m^3, а моларна маса M

= 6,940 g/mol. (Авогадров број је N_A = 6,02 $\cdot 10^{23}$ mol^{-1}, маса електрона је m_e = 9,1 $\cdot 10^{-31}$ kg)

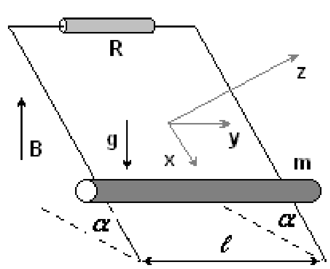
2. (15п) Бирање станица на радио апарату се врши на тај начин што, мењајући капацитет промењљивог кондензатора који је редно везан са отпорником и калемом, мењамо сопствену учестаност осцилаторног кола које се налази у радио пријемнику. Сваки пут када се сопствена учестаност осцилаторног кола у нашем радио пријемнику поклопи са учестаношћу електромагнетних таласа које емитује нека радио станица, доћи ће до резонанције, односно драстичног повећања амплитуде струје у колу и ми ћемо чути програм те станице на звучнику. У реалности ситуација није тако



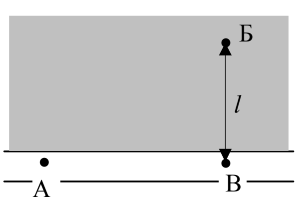
једноставна јер до резонанције не долази само на сопственој учестаности осцилаторног кола, већ се амплитуда струје повећава и на учестаностима блиским резонантној. Удаљавајући се од резонантне учестаности амплитуда струје опада (види слику). Стога две станице блиских фреквенци бивају захваћене резонантном кривом и ми тада чујемо да се оне „мешају”. Да би се мешање станица избегло полуширина Δν резонантне криве (тј. њена ширина на половини висине – види слику) мора бити мања од разлике учестаности на којима емитују две радио станице које желимо да слушамо без „мешања”. Ако је радио дифузна агенција Републике Србије радио станици „Радио џенарика” доделила емисиону учестаност 105,6 MHz, а радио станици „Радио Београд 202” учестаност 105,7 MHz, одредити да ли ће народњаци (верни слушаоци радио џенарике) и рокери (који су уз своју омиљену двеста двојку) моћи несметано да слушају ове две станице без м

јемника који у свом осцилаторном колу имају от

ктивности L= 1,73 mH ?



3. (15п) Хомогени пуни проводни цилиндар масе m се котрља без клизања низ две паралелне проводне шине. На врху, шине су повезане преко отпора R. Систем се налази у хомогеном магнетном пољу $\vec{B}$ антипаралелном гравитационом убрзању $\vec{g}$. Наћи убрзање a цилиндра (a зависи од брзине цилиндра). Индуктивност контуре је занемарљива, као и отпорности шина и цилиндра. Растојање између шина је l, док је α угао између хоризонталне равни и равни у којој леже шине.



4. (10п) Из тачке А, која се налази на асфалтном путу, бициклиста треба да стигне до тачке Б, која се налази на травнатом терену, за најкраће време. Тачка Б се налази на удаљености l од пута. Брзина бициклисте је k пута мања на травнатом терену него на путу. На ком растојању x од тачке В бициклиста треба да сиђе са асфалтног пута и да се упути ка тачки Б.

5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ЗАДАТАК (30п): Да би одредили специфично наелектрисање електрона (количник његовог наелектрисања и масе) електрони се прво из мировања убрзавају напоном U, а затим уводе у хомогено магнетно поље, тако да им је брзина нормална на линије сила магнетног поља. При таквим условима, путања електрона у магнетном пољу је кружница. У магнетном пољу електрони се крећу кроз стаклени балон у којем се налази гас на ниском притиску, који у судару са електронима бива побуђен. Деексцитацијом атома гаса се емитује светлост, што путању електрона чини видљивом. Променом убрзавајућег напона U мења се пречник кружне путање електрона у магнетном пољу. Пречник кружне путање је могуће измерити уз помоћ милиметарског папира, постављеног непосредно иза стакленог балона. У табели су дати резултати мерења: U је убрзавајући напон, мерен волтметром са најмањим подеоком од 10V, док су d_1 и d_2 пречници путање електрона, мерени дуж две узајамно ортоганалне осе, за исти убрзавајући напон U.

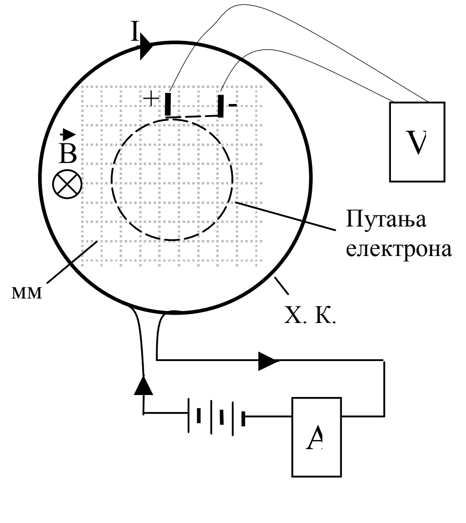
U[V]	100	200	300	400	500	600	700	800	900
d_1[cm]	9,5	13,8	16,5	19,1	21,3	23,4	25,2	27,0	28,6
d_2[cm]	9,6	13,2	16,3	19,4	21,2	23,3	25,2	27,3	28,2

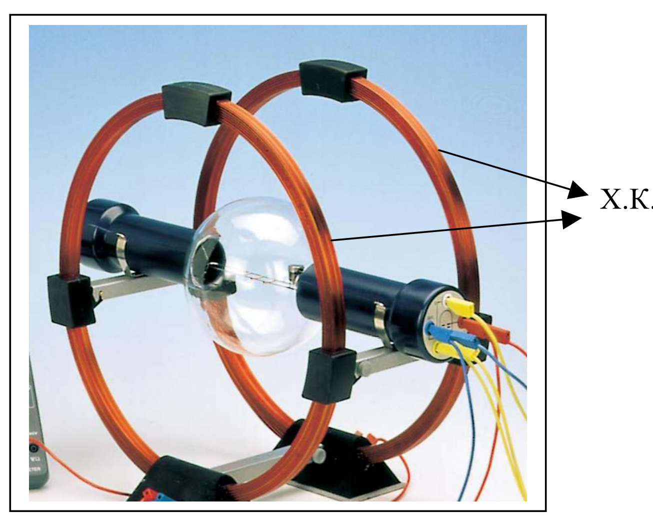
Хомогено магнетно поље је реализивано помоћу Хелмхолцових калемова. То су два једнака кружна калема полупречника R са по N намотаја. Калемови леже у паралелним равнима, нормалним на осу која пролази кроз центре калемова. Растојање центара калемова је једнако полупречнику R - види слику. Сматрати да је у већем делу простора између калемова магнетно поље хомогено, и да интензитет магнетне индукције износи

$$B = \mu_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{NI}{R}.$$

Јачина струје кроз Хелмхолцове калемове је износила I = 3,95A, а мерена је амперметром са најмањим подеоком од 0,05A. Број намотаја је N=50. Пречник калемова је три пута мерен лењиром са милиметарском поделом и добијени су резултати: D_1=50,0cm, D_2=50,2cm и D_3= 49,8cm. Ма гнетна пропустљивост вакуума је μ_0= $4\pi\cdot10^{-7}$ H/m.

<u>Задатак:</u> **Одредити специфично наелектрисање електрона и проценити грешке мерења**, знајући да електрони у судару са атомима гаса не губе значајан део своје енергије.





Шема експеримента за одређивање специфичног наелектрисања електрона.
Х.К. - Хелмхолцови калемови, мм-милиметарски папир, А - амперметар за мерење јачине струје кроз Хелмхолцове калемове, В - волтметар за мерење напона који убрзава електроне

Задатке припремио: Александар Крмпот
Рецензент: мр Ђорђе Спасојевић
Председник Комисије: др Мићо Митровић

Решење задатака за републичко такмичење школске 2005/2006.
IV разред

1. а) Из Ојлерове формуле следи $\frac{de^{i\alpha}}{d\alpha} = ie^{i\alpha}$, одакле је $pe^{i\alpha} = -i\hbar\frac{de^{i\alpha(x)}}{dx} = -i\hbar\frac{de^{i\alpha}}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = -i\hbar ie^{i\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \hbar\frac{d\alpha}{dx}\cdot e^{i\alpha}$, па након скраћивања са $e^{i\alpha}$ видимо да се решење једначине (1) добија за $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{p}{\hbar}$, одакле је $\alpha = \frac{px}{\hbar}$.
Стога се види да таласна функција може потражити у облику $\Psi(x) = Ae^{ipx/\hbar}$, где је A константа коју налазимо из услова нормирања таласне функције $\int_0^L \left|\Psi(x)\right|^2 dx = 1$. Обзиром да је $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$, следи $1 = A^2 L$ одакле је $A = \frac{1}{\sqrt{L}}$, тако да тражена таласна функција коначно гласи $\Psi(x) = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{L}}$

б) Из услова $\Psi(0) = \Psi(L)$ налазимо да су дозвољене вредности импулса p оне за које је $1 = e^{ipL/\hbar}$, односно $pL/\hbar = m\cdot 2\pi$, где је m било који цео број. Тако су коначно дозвољене вредности импулса облика $p_m = m\cdot\frac{2\pi\hbar}{L} = m\cdot\frac{h}{L}$

в) Запремина наведеног сферног слоја у импулсном простору (то је простор чије су координате p_x, p_y, p_z) износи $4\pi\cdot p^2\Delta p$. Са друге стране дозвољене вредности сваке компоненте импулса чине дискретан низ вредности облика $m\cdot\frac{h}{L}$, а разлика суседних дозвољених вредности је $\frac{h}{L}$. То значи да свако стање запрема коцку (у импулсном простору) запремине $\frac{h^3}{L^3} = \frac{h^3}{V}$, где је $V = L^3$ запремина коцке. Стога је број електрона ΔN унутар наведеног сферног слоја једнак $\Delta N = 2\cdot\frac{4\pi V}{h^3}\cdot p^2\Delta p$, где фактор 2 долази отуд што се по Паулијевом принципу у сваком стању могу наћи два електрона са супротним пројекцијама спина.

г) Обзиром да укупан број електрона N мора да задовољи једнакост $N = \sum\Delta N = \int_0^{p_F}\frac{8\pi V}{h^3}\cdot p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3}\cdot p_F^3$, где је p_F Фермијев импулс – максималан интензитет импулса електрона. Обзиром да је енергија електрона $E = \frac{p^2}{2m_e}$, следи да је максималан енергетски ниво – Фермијев ниво дат са $E_F = \frac{p_F^2}{2m_e}$, односно $E_F = \left(\frac{3}{8\pi}n\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{2m_e}$ **(3п)**, где је $n = \frac{N}{V}$ концентрација електрона.

д) Укупна енергија E система од N електрона $E=\sum\frac{p^2}{2m_e}\cdot\Delta N=\int_0^{p_F}\frac{p^2}{2m_e}\cdot\frac{8\pi V}{h^3}\cdot p^2dp=\frac{8\pi V}{2m_e h^3}\cdot\frac{p_F^5}{5}$, заменом одговарајућих вредности налазимо $E=\frac{3}{5}E_F N=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{2m_e}\cdot\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$. Одавде је тражени притисак $P=-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_N=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{m_e}\cdot n^{5/3}=\frac{2}{5}\cdot E_F\cdot n$.

ђ) За литијум је Обзиром на $n = N/V$ и $\rho = m/V$, следи $n = \rho(N_A/M)$, што за литијум даје $n=4{,}62\cdot 10^{28}$ m^{-3}. Заменом добијене вредности у формулу за Фермијев ниво и притисак добијамо $E_F=4{,}70$ eV, односно $P=13{,}96\,\mathrm{GPa}$.

2. Предпоставимо да је капацитет промењивог кондензатора фиксиран на вредности C. Амплитуда јачине струје на фреквенци ω је $I_0(\omega)=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$.

Ова величина има максималну вредност $I_{0r}=U_0/R$ при резонантној учестаности $\omega_r=1/\sqrt{LC}$. Фреквенције при којима амплитуда струје достиже половину максималне вредности добијамо из $I_0(\omega)=I_{0r}/2$, одакле се након очевидних трансформација добија $\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2=3R^2$. Кореновањем ове једначине добијају се две једначине $L\omega-\frac{1}{C\omega}=\pm\sqrt{3}R$ које, након множења са $C\omega$ и коришћењем смене $LC=1/\omega_r^2$, дају две квадратне једначине:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\mp\frac{\sqrt{3}R}{L\omega_r}\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)-1=0.$$

Позитивна решења ових једначина гласе

$$\left(\frac{\omega_\pm}{\omega_r}\right)=\sqrt{1+\frac{3R^2}{4L^2\omega_r^2}}\pm\frac{\sqrt{3}R}{2L\omega_r}$$

одакле је полуширина резонантне криве

$$\Delta\nu=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{\omega_+-\omega_-}{2\pi}=\frac{\sqrt{3}R}{2\pi L}=7{,}96\,\mathrm{kHz}.$$

Приметимо да добијени израз показује да је полуширина свих резонантних кривих (добијених за различите вредности промењивог капацитета у радио пријемнику) једна те иста. Како разлика емисионих учестаности поменутих радио станица износи 0,1MHz=100kHz, јасно је да неће доћи до њиховог мешања.

3. На цилиндар који се котрља низ шине делују следеће силе: $mg\sin\alpha$ - компонента гравитационе силе дуж x-осе, Амперова сила F_A која кочи цилиндар и

сила трења F_T која омогућава котрљање без клизања. Једначина кретања цилиндра дуж x-осе гласи $ma = mg\sin\alpha + F_A + F_T$.

Амперова сила је $F_A = IBl\cos\alpha$, где је I индукована струја. Како је промена флукса кроз контуру коју образују шине, цилиндар и отпорник једнака $d\Phi / dt = Blv\cos\alpha$, где је v брзина цилиндра, то је $I = \varepsilon_{ind} / R = -(Blv\cos\alpha)/R$ па је $F_A = -(Bl\cos\alpha)^2 v / R$.

Сила трења F_T је супротно усмерена од брзине цилиндра, тј $F_T \prec 0$. Једначина ротације цилиндра око његове осе је $J\dfrac{d\omega}{dt} = -F_T \cdot r$, одакле се види да се ротација цилиндра током котрљања убрзава; овде је r полупречник цилиндра, ω његова угаона брзина, а $J = mr^2/2$ момент инерције цилиндра. Обзиром да се цилиндар котрља без клизања вреди $v = \omega r$, односно $d\omega / dt = a / r$ што даље даје $F_T = -\dfrac{m}{2}a$.

Сменом нађених израза за F_A и F_T у једначину кретања добијамо: $ma = mg\sin\alpha - \dfrac{(Bl\cos\alpha)^2}{R}v - \dfrac{m}{2}a$, одакле коначно налазимо тражени израз за убрзање цилиндра $a = \dfrac{2}{3}\left[g\sin\alpha - \dfrac{(Bl\cos\alpha)^2}{mR}v\right]$.

4. Ако бициклиста скрене са пута на растојању x од тачке В, онда је време његовог кретања до тачке Б једнако

$$t(x) = \frac{L - x}{v} + \frac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v / k}$$

где је v брзина кретања бициклисте по асфалтном путу. Минимално време кретања се одређује из услова

$$\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{kx - \sqrt{x^2 + l^2}}{v\sqrt{x^2 + l^2}} = 0,$$

тј. $kx - \sqrt{x^2 + l^2} = 0$, одакле је

$$x = \frac{l}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

5. Убрзани напоном U, електрони добијају кинетичку енергију

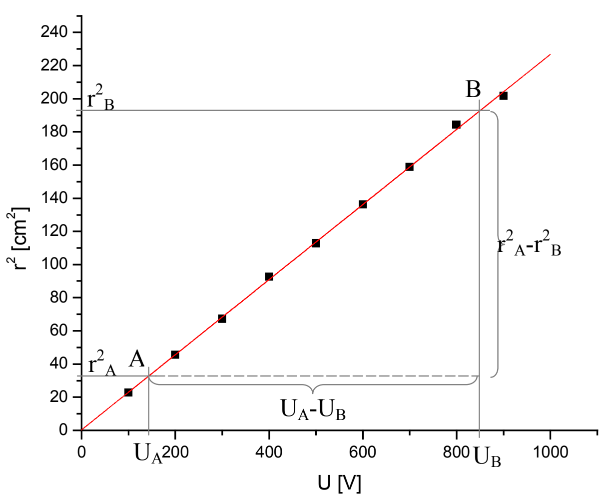
$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = eU$$

где је m_e маса а v брзина електрона, док је e елементарно наелектрисање ($-e$ је наелектрисање електрона). Одавде је брзина електрона $v = \sqrt{2eU/m_e}$. У магнетном пољу индукције $\vec{B}$ на електроне делује Лоренцова сила $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ која је нормална на брзину електрона, па не мења интензитет већ само правац брзине. Када електрони улете у хомогено магнетно поље нормално на линије поља, Лоренцова сила саопштава електронима нормално убрзање $a_n = v^2/r$ одређено са $evB = \frac{m_e v^2}{r}$, где је r полупречник кривине путање електрона. Одавде је $r = \frac{m_e v}{eB} = const$, а како се електрон креће у равни нормалној на линије поља путања електрона је кружница полупречника r. Квадрирањем добијеног израза за r, уз коришћење добијеног израза за брзину електрона, добијамо:

$$r^2 = \left(\frac{2}{B^2} \cdot \frac{m_e}{e} \right) U$$

одакле се види да је квадрат полупречника кружне путање електрона линеарна функција убрзавајућег напона U са коефицијентом правца $k = \left(\frac{2}{B^2} \cdot \frac{m_e}{e} \right)$.

Из табеларних података се за свако U одреди средња вредност пречника кружнице d=(d_1+d_2)/2, а затим полупречник $r = d/2$. Добијене вредности за $r^2 = f(U)$ се представе графички (на милиметарском папиру) . Кроз експерименталне тачке се повуче најбоља права – види слику, на којој је дата најбоља права добијена методом најмањих квадрата чији је коефицијент правца $k = 0{,}22637$ cm²/V (незаокру-жена вредност), односно након заокруживања $k = (0.226 \pm 0.002)$ cm²/V, док је њен одсечак $n = (0{,}4 \pm 1{,}2)$ cm². Од такмичара се не захтева да најбољу праву одреде методом најмањих квадрата – довољно је најбољу праву одредити графичком методом, и тако одређена права се у разумној мери мора слагати са правом одређеном методом најмањих квадрата.



За одређивање специфичног наелек-трисања потребно је знати и магнетну индукцију B. Она се може израчунати помоћу формуле дате у поставци задатка и података за струју и пречнике Хелмхолцових калемова. Пречник Хелмхолцових калемова се рачуна као средња вредност три мерења пречника датих у задатку. Средњи пречник калемова је $D_s = 50{,}0\,\mathrm{cm}$, док је апсолутна грешка ове величине $\Delta D = |D_i - D_s|_{\max} = 0{,}2$ cm. Полупречник Хелмхолцових калемова је $R = (25{,}0 \pm 0{,}1)$ cm. Стога је $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} = 0{,}01666$, те је $B = (0{,}710 \pm 0{,}012)\,\mathrm{mT}$.

Одређивање коефицијента правца најбоље праве са графика на милиметарском папиру: при крајевима интервала мерења одаберу се две (не експерименталне) тачке A и B са праве – види слику, и из њихових координата се одреди коефицијент правца као

$$k = \frac{r_A^2 - r_B^2}{U_A - U_B}$$

Грешка коефицијента правца се рачуна на основу

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta(r_A^2 - r_B^2)}{|r_A^2 - r_B^2|} + \frac{\Delta(U_A - U_B)}{|U_A - U_B|}$$

$$\Delta(r_A^2 - r_B^2) = \Delta r_A^2 + \Delta r_B^2 = 2r_A \Delta r_A + 2r_B \Delta r_B$$

$$\Delta(U_A - U_B) = \Delta U_A + \Delta U_B$$

При томе је $\Delta r = \Delta d / 2$, где је $\Delta d = 2\,\mathrm{mm}$ грешка мерења пречника путање на милиметарском папиру; ова грешка је иста за све експерименталне тачке и већа је од максималне апсолутне девијације пречника мереног при свих 9 вредности напона. Грешка мерења напона је $\Delta U = 10\,\mathrm{V}$ за све вредности напона. Грешке очитавања су занемарене.

За $A(U_A = 140\,\mathrm{V},\ r_A^2 = 32\,\mathrm{cm}^2)$ и $B(U_B = 850\,\mathrm{V},\ r_B^2 = 193\,\mathrm{cm}^2)$ добија се: $k = 0{,}22676$ cm^2/V (незаокружено), као и $\Delta k / k = 0{,}05245$, одакле је $\Delta k = 0{,}01189$ cm^2/V $\approx 0{,}012$ cm^2/V. Тако је коначно

$$k = (0{,}227 \pm 0{,}012)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{V}$$

одакле се за специфично наелектрисање добија $e / m_e = 1{,}749 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ (незаокружена вредност). Како је

$$\frac{\Delta(e / m_e)}{e / m_e} = 2\frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta k}{k} = 0{,}08577$$

следи $\Delta(e / m_e) = 0{,}15 \cdot 10^{11}$ C/kg, тако да је коначно

$$e / m_e = (1{,}75 \pm 0{,}15) \cdot 10^{11}\ \mathrm{C/kg}$$

што представља апсолутну вредност специфичног наелектрисања електрона.