ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & + & (a-1)y & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.

3. Нека је $x > 0$ реалан број. Одредити поредак бројева (сортирати по величини)

$$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

1. $f(1) = 0$;
2. $f(p) = 1$ за сваки прост број p;
3. $f(ab) = af(b) + bf(a)$ за све природне a и b.

Одредити све n за које је $f(n) = n$.

5. У сваком пољу табле 12×2008 уписан је по један природан број. Једним потезом је дозвољено удвостручити све бројеве неке врсте или смањити за 1 све бројеве неке колоне. Да ли се увек после неког броја потеза може добити таблица у којој су сви бројеви једнаки 0?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & + & (a-1)y & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. Доказати да једначина

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

нема решења у скупу реалних бројева.

3. На кошаркашком турниру учествовало је 8 екипа и свака је са сваком одиграла по једну утакмицу. За победу се добија два поена, а поражена екипа добија 0 поена (нема нерешених утакмица). Екипе су сакупиле редом 14,12,8,8,6,4,2,2 поена. Колико утакмица су последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе?

4. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcl} \log_{|x-y|} \dfrac{xy}{2} & = & 2, \\ x + y & = & xy + 1. \end{array}$$

5. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Како је $\operatorname{Re} z = \dfrac{5}{2}$ и како је $\omega - \overline{\omega} = 2i \cdot \operatorname{Im}\omega$ за свако $\omega \in \mathbb{C}$, следи $4 \cdot \operatorname{Im} z = 20$, тј. $\operatorname{Im} z = 5$.

Дакле, $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \dfrac{5}{2} + 5i$ (Тангента 41, стр. 32, Писмени задаци, задатак 5).

3. Једначина из задатка није дефинисана за $x \in \{-2, 0, 2\}$.
За $x \neq -2, 0, 2$ важи

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} & = & \dfrac{1}{x^2-2x} \\ \Leftrightarrow \quad 2x + (x-4)(x-2) & = & x+2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 & = & 0, \end{array}$$

а последња квадратна једначина има решења $x = 2$ и $x = 3$.

Међутим, како једначина није дефинисана за $x = 2$, једино решење је $x = 3$ (Тангента 42, стр. 42, Писмени задаци, задатак 1).

4. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

5. Ако први уторак у месецу није и први дан у месецу, први уторак у месецу је истовремено и први уторак после првог понедељка у месецу, па по условима задатка следи да је први уторак у првопоменутом месецу и први дан тог месеца. Аналогно, у следећем месецу је среда први дан тог месеца.

Дакле, првопоменути месец има $7k + 1$ дана (за неко $k \in \mathbb{N}$), а како месеци имају 28, 29, 30 или 31 дан, следи да је тај месец фебруар и да је година преступна.

Дакле, следећи месец је март, а 8. март је прва среда после првог уторка у том месецу, тј. Марија је 8. март провела на Златибору.

Трећи разред, А категорија

1. Како је

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 4 = (a-2)^2(a+1), \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1-a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a + 0 + (a-1)^2 - a(a-1) - 1 - 0 = 0, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + a - a^2 = -(a-2)(a+1), \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1-a & -1 & -1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 + 2a^2 + a - 2 = -(a-2)(a+1)(a-1), \end{aligned}$$

за $a \notin \{-1, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па систем за ове a има једно решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(0, -\frac{1}{a-2}, -\frac{a-1}{a-2}\right).$$

За $a = 2$ прва једначина система гласи $x + y - z = 2$, а трећа $x + y - z = 0$, па у овом случају систем нема решења (што се могло закључити и из тога што је $a = 2$ двострука нула Δ, а једнострука Δ_y и Δ_z).

За $a = -1$ систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ 2x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & - & 2y & - & z & = & 0. \end{array}$$

Одузимањем прве једначине од треће, односно двоструке прве једначине од друге, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \end{array}$$

односно

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \end{array}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = -z - \dfrac{1}{3}$ и $x = -1 - y - 2z = -1 + z + \dfrac{1}{3} - 2z = -z - \dfrac{2}{3}$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

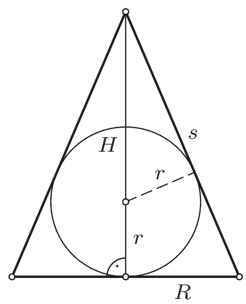
$$\left\{ \left(-z - \frac{2}{3}, -z - \frac{1}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

(Тангента 42, стр. 39, Писмени задаци, задатак 4).

2. Нека је r полупречник лопте, а R, H и s полупречник основе, висина и изводница купе описане око те лопте, редом.

Изражавањем површине осног пресека купе на два начина, добија се $RH = (R+s)r$, одакле је $\dfrac{RH}{r} = R+s$, па је $\dfrac{R^2H}{4r^3} = \dfrac{R(R+s)}{4r^2}$, односно $\dfrac{\frac{1}{3} \cdot R^2H\pi}{\frac{4}{3} \cdot r^3\pi} = \dfrac{R(R+s)\pi}{4r^2\pi}$, тј.

$$\frac{V_K}{V_L} = \frac{P_K}{P_L}.$$



ОП 08 ЗА 2

3. Ако је $x = 1$ сви наведени бројеви су међусобно једнаки.

Нека је $0 < x < 1$. Како је експоненцијална функција строго монотоно опадајућа ако јој је основа мања од 1, следи

$$0 < x < 1 \;\Rightarrow\; x^0 > x^x > x^1 \;\Rightarrow\; x^1 < x^{x^x} < x^x \;\Rightarrow\; x^x > x^{x^{x^x}} > x^{x^x} \;\Rightarrow\; x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}},$$

па је (за $0 < x < 1$) тражени распоред

$$x < x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}} < x^x.$$

Нека је $x > 1$. Како је експоненцијална функција строго монотоно растућа ако јој је основа већа од 1, следи

$$1 < x \;\Rightarrow\; x^1 < x^x \;\Rightarrow\; x^x < x^{x^x} \;\Rightarrow\; x^{x^x} < x^{x^{x^x}} \;\Rightarrow\; x^{x^{x^x}} < x^{x^{x^{x^x}}},$$

па је (за $x > 1$) тражени распоред

$$x < x^x < x^{x^x} < x^{x^{x^x}} < x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Из услова 3 задатка следи

$$\frac{f(ab)}{ab} = \frac{f(a)}{a} + \frac{f(b)}{b},$$

па ако је $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, захтев задатка постаје да се одреде сви $n \in \mathbb{N}$ такви да је $g(n) = 1$, где је $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

1. $g(1) = 0$;
2. $g(p) = \dfrac{1}{p}$ за сваки прост број p;
3. $g(ab) = g(b) + g(a)$ за све природне a и b.

Из новог услова 3 следи да за $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (канонска факторизација броја n) важи $g(n) = \alpha_1 g(p_1) + \alpha_2 g(p_2) + \ldots + \alpha_k g(p_k)$, па треба одредити све n за које је

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1. \qquad (\ddagger)$$

Сви сабирци у претходној једнакости су позитивни, па је $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\})\ \alpha_i \leqslant p_i$. Након множења исте једнакости са $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, добија се једнакост у којој су сви сабирци сем једног дељиви са p_i, па и тај сабирак $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot \frac{\alpha_i}{p_i})$ мора бити дељив са p_i, па $p_i \mid \alpha_i$, одакле је $\alpha_i \geqslant p_i$ (за свако $\{1, 2, \ldots, k\}$).

Следи да су сви сабирци у $(\ddagger)$ једнаки 1, па се у тој једнакости појављује само један сабирак, односно тражени бројеви су бројеви облика p^p, где је p прост број (Тангента 44, стр. 18, Наградни задаци, M554, решење у Тангенти 45, стр. 22).

5. Нека је смањивање за 1 свих бројеве неке колоне прва, а удвостручавање свих бројева неке врсте друга операција и нека се на табли врши следећи алгоритам:

1. уочи се колона те табле;
2. примењује прва операција, док најмањи елемент те колоне не постане 1 (скуп $\mathbb{N}$ је ограничен одоздо, па је ово могуће урадити);
3. ако су сви елементи те колоне једнаки 1, алгоритам се завршава, а иначе се на све врсте које одговарају елементима те колоне који су једнаки 1 примени друга операција, а након тога врати на корак 2.

Алгоритам се завршава. Заиста, највећи број у тој колони (може их бити и више) се након прве операције смањи за 1, као и након примене корака 3 па 2 претходног алгоритма, па ће сви елементи уочене колоне у једнаом моменту постати једнаки 1. Поновном применом прве операције сви елементи те колоне постају 0.

Примена прве операције на некој колони не мења елементе осталих колона те табле, а примена друге операције природне бројеве слика у природне, док елементи који су једнаки 0 остају 0. Следи да су након горњег алгоритма сви бројеви других колона остали природни (ако су били природни), односно 0 (ако су били 0), па се понављањем алгоритма на свим колонама ове табле добија табла у којој су сви бројеви једнаки 0.

Трећи разред, Б категорија

1. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

2. Једначина из задатка је дефинисана за $x \neq 0$.

Како је $(\forall \varphi) |\sin \varphi| \leqslant 1$, следи да је

$$|L| = \left| 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{6}\right) \right| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot 1.$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске неједнакости, следи

$$D = \frac{1}{x^2} + x^2 \geqslant \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot x^2} = 2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x^2 = 1$, тј. $x \in \{-1, 1\}$.

Како је $L = D$, мора бити $L = D = 2$, тј. $x \in \{-1, 1\}$. Међутим, како је

$$2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{6}\right) \neq 2 \neq 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{-1}{6}\right),$$

следи да ова једначина нема решења у скупу реалних бројева (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, M591, решење у Тангенти 47, стр. 19).

3. Последње четири екипе су међусобно одиграле $\binom{4}{2} = 6$ мечева и у њима је освојено

$6 \cdot 2 = 12$ поена. Сваки од ових поена је припао једној од последње четири екипе. Како су оне освојиле $6+4+2+2=14$ поена, последње четири екипе су у утакмицама против прве четири екипе освојиле $14-12=2$ поена, тј. последње четири екипе победиле су прве четири екипе у једној утакмици, односно последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе у $4\cdot4-1=15$ утакмица (укупан број утакмица које су последње четири екипе одиграле против прве четири екипе је $4\cdot 4=16$) (Тангента 49, стр. 13, Наградни задаци, М651, решење у Тангенти 50, стр. 14).

4. Једначине из задатка су дефинисане за $\dfrac{xy}{2} > 0$, $|x-y|>0$ и $|x-y|\neq 1$.

Из друге једначине следи $(x-1)(y-1)=0$, одакле је $x=1$ или $y=1$.

Ако је $y=1$, из прве једначине следи $\dfrac{x}{2} = |x-1|^2 = (x-1)^2 = x^2-2x+1$, одакле је $2x^2-5x+2=0$, тј. $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$. Међутим, ако је $x=2$, тада је $|x-y| = |2-1| = 1$, па ово није решење.

Како је систем симетричан по x и y, за $x=1$ добија се решење $y=\dfrac{1}{2}$.

Дакле, реална решења система из задатка су $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ (Тангента 42, стр. 47, Пријемни испити, задатак 13).

5. Видети решење другог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Из $a\cdot 2^x + b = b\cdot 2^{-x} + a$ добија се $a\cdot 2^{2x} + (b-a)\cdot 2^x - b$, одакле је $2^x = 1$ или $2^x = -\dfrac{b}{a}$. Дакле, графици f и g имају тачно две заједничке тачке ако и само ако је $ab<0$ и $a\neq -b$ и тада су то тачке $(0, a+b)$ и $\left(\log_2\left(-\dfrac{b}{a}\right), 0\right)$.

2. Ако је n непаран (тј. $n=2k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}_0$), тада је

$$5^{2k+1} + 12^{2k+1} \equiv 2\cdot 2^{2k} \equiv 2\cdot(-1)^k \pmod 5$$

и не може бити потпун квадрат, јер квадрати при дељењу са 5 могу давати остатке 0,1 или 4.

Ако је n паран (тј. $n=2k$ за неко $k\in\mathbb{N}$) и $x^2 = 5^n + 12^n$ за неко $x\in\mathbb{N}$, тада је $5^{2k} = x^2 - 12^{2k} = (x-12^k)(x+12^k)$. Ако $5 \mid x-12^k$ и $5\mid x+12^k$, тада $5 \mid 2\cdot 12^k = (x+12^k)-(x-12^k)$, што је немогуће, па је $x-12^k=1$ и $x+12^k = 5^{2k}$, одакле је $2\cdot 12^k = 5^{2k}-1 = 25^k - 1 > 24^k = 2^k\cdot 12^k$. За $k\geqslant 2$ следи $2\cdot 12^k > 2^k\cdot 12^k > 2\cdot 12^k$, што је контрадикција. Провером, за $k=1$ се добија решење, тј. $n=2$ је једини природни број који задовољава услове задатка ($5^2+12^2=13^2$) (Тангента 45, стр. 17, Наградни задаци, М570, решење у Тангенти 46, стр. 23).

3. Ако би сва решења једначине из задатка ($x_1, x_2, \ldots, x_n$–има их n јер полином n-тог степена има n комплексних нула) били реални бројеви, тада би на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине било $\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^2\cdot x_2^2\cdot\ldots\cdot x_n^2}$, одакле је $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 - 2\cdot(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n) \geqslant n\cdot\sqrt[n]{x_1^2\cdot x_2^2\cdot\ldots\cdot x_n^2}$, односно $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \geqslant n\cdot\sqrt[n]{a_0^2}$, што је у супротности са условом задатка.

4. Нека су A' и B' подножја нормала $\triangle ABC$ из тачака A и B, редом, а α, β, γ одговарајући углови троугла. Како је $\triangle AB'H \sim \triangle ACA'$, следи $\dfrac{AH}{AB'} = \dfrac{AC}{AA'}$, а како је $AA' = b\sin\gamma$ (из $\triangle ACA'$), $AB' = c\cos\alpha$ (из $\triangle ABB'$) и $c = a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (синусна теорема), следи $AH = \dfrac{bc\cos\alpha}{b\sin\gamma} = a\operatorname{ctg}\alpha$. Аналогно је $BH = b\operatorname{ctg}\beta$ и $CH = b\operatorname{ctg}\gamma$, па треба доказати да је

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}\,. \qquad (\dagger)$$