

# РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

## ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

### Први разред – А категорија

1. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија  $6 \times 2006$  тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?

*Решење:* Први топ се на таблу може поставити на било које поље, дакле на  $6 \cdot 2006$  начина. Следећи топ се може поставити на неко од поља која се не налазе у истој врсти или колони са претходно већ постављеним топом. Другим речима “прецртамо” забрањену колону и врсту и поставимо други топ на новодобијену шаховску таблу димензија  $5 \times 2005$ , то се може урадити на  $5 \cdot 2005$  начина. Слично, последњи топ се може поставити на  $4 \cdot 2004$  начина. Поредак стављања топова није битан, дакле иста позиција се појављује  $3! = 6$  пута. Коначан одговор је

$$(6 \cdot 2006 \cdot 5 \cdot 2005 \cdot 4 \cdot 2004) : 6 = 20 \cdot 2006 \cdot 2005 \cdot 2004.$$

*Напомена:* Решење се може формулисати на више начина. Нпр. могуће је изабрати 3 колоне и независно 3 врсте у којима ће се топови налазити, то се може извести на  $\binom{2006}{3} \cdot \binom{6}{3}$  начина. У изабране колоне и врсте се топови могу поставити на  $3! = 6$  начина итд.

2. Одреди највећи заједнички делилац бројева  $2^{2006} - 1$  и  $2^{2004} - 1$ .

*Решење:* НЗД заданих бројева је и делилац њихове разлике  $2^{2006} - 2^{2004} = 2^{2004}(2^2 - 1) = 2^{2004} \cdot 3$ . Пошто су задати бројеви непарни, остаје да се провери да ли је НЗД 1 или 3. Лако се доказује да је  $2^{2n} - 1$  увек дељив са 3. Заиста,  $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$  па то следи нпр. из идентитета  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$ . Тачан одговор је НЗД = 3.

3. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (М388)

*Решење:* Нека је  $d$  највећи заједнички делилац тих 49 природних бројева. Тада важи

$$d \mid 999 = 3^3 \cdot 37$$

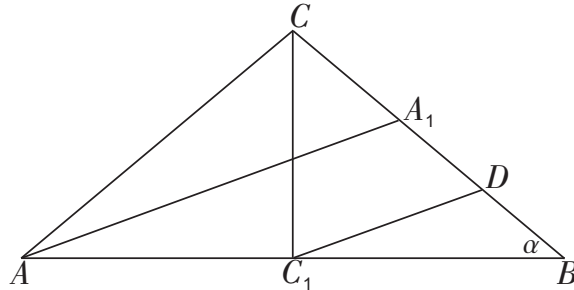
и како мора бити  $d \leq \frac{999}{49} < 21$ , следи  $d \in \{1, 3, 9\}$ . Вредност 9 се може постићи, нпр.

$$\underbrace{9 + 9 + \dots + 9}_{48} + 567 = 999$$

и тада је  $NZD(9, 9, \dots, 9, 567) = 9$ .

4. Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла на основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици. (M362)

*Решење:* Нека је  $\triangle ABC$  (слика 1) посматрани једнакокраки троугао,  $CC_1$  његова висина која одговара основици  $AB$ ,  $AA_1$  симетрала угла  $A$  и  $\alpha$  мера угла на основици.

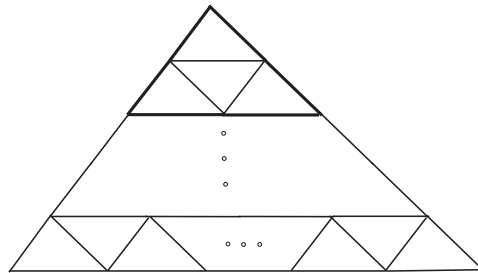


Слика 1.

Означимо са  $D$  средиште дужи  $BA_1$ . Тада је  $C_1D$  средња линија  $\triangle ABA_1$ , па је  $C_1D = \frac{AA_1}{2}$  и  $C_1D \parallel AA_1$ , одакле је  $\angle BC_1D = \angle BAA_1 = \frac{\alpha}{2}$ . По услову задатка је  $AA_1 = 2 \cdot CC_1$ , па је на основу претходног  $CC_1 = C_1D$ . Према томе,  $\triangle CC_1D$  је једнакокрак, па је  $\angle DCC_1 = \angle CDC_1 = 90^\circ - \alpha$ , одакле је  $\angle CC_1D = 2\alpha$ . Како је  $\angle CC_1D + \angle DC_1B = 2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ , закључујемо да је  $\alpha = 36^\circ$ , тј. углови у  $\triangle ABC$  су  $36^\circ, 36^\circ$  и  $108^\circ$ .

5. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (M327)

*Решење:* Произвољни троугао увек можемо поделити на  $n^2$  подударних троуглова (слика 2)  $(1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2)$ .



Слика 2.

Одговарајућим спајањем по 4 или 9 таквих троуглова добијамо такође троугао сличан полазном, а укупан број троуглова се умањује за 3, односно 8. Како је  $45^2 - 2 \cdot 8 - 1 \cdot 3 = 2025 - 19 = 2006$ , закључујемо да је могуће произвољни троугао поделити на 2006 троуглова који су му слични.

(Напомена: Постоје и многа друга решења!)

**РЕШЕЊА ЗАДАТАКА**  
**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**28.01.2006.**

**Први разред – Б категорија**

1. Одредити број деветоцифрених бројева дељивих са 225, код којих су све цифре различите а цифра стотина им је 7.

(Тан36, стр. 26)

*Решење:* Уочимо да је  $225 = 25 \cdot 9$ . Из дељивости са 25 закључујемо да су последње две цифре траженог броја 00, 25, 50 или 75. Случај 00 није могућ јер све цифре морају бити различите, као (из истих разлога) ни случај 75 јер је цифра стотина 7. Тражени број је дељив са 9 и свих девет цифара су му различите. Пошто је  $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ , избацавањем једног од ових бројева се добија број дељив са 9 само ако је избачени број или 0 или 9. Ако је избачена цифра 0, последње три цифре морају бити 725 а преостале цифре се могу изабрати на  $6!$  начина. Ако је избачена цифра 9, онда су могућа оба случаја 25 и 50 па дакле има  $2 \cdot 6!$  оваквих бројева. Коначан одговор је  $3 \cdot 6!$ .

2. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија  $6 \times 2006$  тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?

*Решење:* Видети решење истог задатка за први разред у А категорији (задатак 1.).

3. Нека је  $S = \{a, b, c\}$ . Колико има функција  $f : S \rightarrow S$  за које важи  $f(f(x)) = x$  за свако  $x \in S$ ?

*Решење 1:* Услов задатака каже да ако је  $f(x) = y$  за неке елементе  $x$  и  $y$  да онда важи и  $f(y) = x$ . Функција "идентитет" тј. функција која задовољава услов да је  $f(x) = x$  за сваки  $x$  је једно решење. За свако друго решење се могу наћи  $x \neq y$  такви да је  $f(x) = y$  и  $f(y) = x$ . Ако је нпр.  $\{x, y\} = \{a, b\}$  онда је  $f(c) = c$ . Слично, ако је  $\{x, y\} = \{b, c\}$  онда је  $f(a) = a$  и ако је  $\{x, y\} = \{c, a\}$  онда је  $f(b) = b$ . Одавде следи да има укупно 4 такве функције.

*Решење 2:* Докажимо најпре да је функција  $f$  бијекција. Ако је  $f(x) = f(y)$  за неке  $x, y \in S$ , онда је  $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$ . Овим смо доказали да је функција "1-1". Функција  $f$  је и "на" пошто се за сваки  $x \in S$  добија као слика од  $f(x)$  (зато што важи  $f(f(x)) = x$ ). Постоји  $3! = 6$  бијекција скупа  $S$  и то су

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Од наведених само функције  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_6$  задовољавају задати услов. Тражених функција дакле има 4.

4. Наћи све уређене парове реалних бројева  $(x, y)$  који задовољавају једначине (M324)

$$|x + y - 4| = 5, \quad |x - 3| + |y - 1| = 5.$$

*Решење:* Из датог система следи да је  $|x + y - 4| = |x - 3 + y - 1| = |x - 3| + |y - 1|$ , а ово је тачно само ако су  $x - 3$  и  $y - 1$  истог знака. Дакле, решења треба тражити у областима  $D_1 = \{(x, y) \mid x \geq 3, y \geq 1\}$  и  $D_2 = \{(x, y) \mid x \leq 3, y \leq 1\}$ .

У области  $D_1$  систем је еквивалентан једначини  $x + y - 4 = 5$ , па је скуп решења у тој области  $R_1 = \{(x, y) \mid y = 9 - x, 3 \leq x \leq 8\}$ .

У области  $D_2$  систем је еквивалентан једначини  $x + y = -1$ , па је скуп решења у овој области  $R_2 = \{(x, y) \mid y = -1 - x, -2 \leq x \leq 3\}$ .

Дакле, скуп решења полазног система је  $R = R_1 \cup R_2$ .

5. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (M388)

*Решење:* Видети решење истог задатка за први разред у А категорији (задатак 3.).