

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

Први разред, А категорија

1. Одредити на колико начина се могу изабрати природни бројеви a , b и c тако да важи:

$$1^\circ \quad a < b < c < 52; \quad 2^\circ \quad a \text{ дели } c; \quad 3^\circ \quad b \text{ дели } c;$$

$$4^\circ \quad a \text{ и } b \text{ нису дељиви квадратом природног броја већег од } 1;$$

$$5^\circ \quad c \text{ јесте дељив квадратом природног броја већег од } 1.$$

2. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и $\sphericalangle CAB = 15^\circ$. Нека је M тачка на полуправој BC таква да је $\overrightarrow{BM} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$. Одредити углове троугла ABM .

3. Одредити остатак при дељењу полинома $x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$ полиномом $(x - 1)^3$.

4. Око троугла ABC описати једнакостраничан троугао PQR највеће могуће дужине странице ($\triangle PQR$ је описан око $\triangle ABC$ ако је $A \in QR$, $B \in RP$, $C \in PQ$).

5. Доказати да постоји природан број n такав да је број $2p^n + 3$ сложен за сваки прост број p .

Први разред, Б категорија

1. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да је број $(a + b)^6 - a^6$ дељив бројем $a^2 + ab + b^2$.

2. Доказати да је број $3^{105} + 4^{105}$ дељив са $49 \cdot 181$.

3. Нека је P тачка у унутрашњости $\triangle ABC$, таква да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Нека су M и K подножја нормала из тачке P на странице BC и AC , редом. Ако је D средиште странице AB , доказати да је $DK = DM$.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Капетан је добио задатак да распореди 12 војника (различитих по висини) у 3 врсте по 4 војника, тако да су испуњени следећи услови:

1° сваки војник је нижи од свих војника који се налазе иза њега (у осталим врстама);

2° сваки војник је нижи од свих војника који се налазе десно од њега (у његовој врсти);

3° у последњој врсти се налазе 4 највиша војника.

На колико начина капетан то може учинити?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ
МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

Први разред, А категорија

1. Како је c дељиво квадратом природног броја, c може бити један од бројева:

4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32, 36, 40, 44, 45, 48, 49, 50,

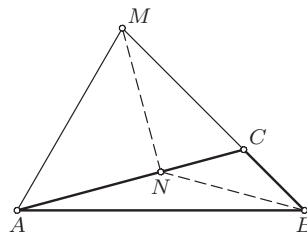
тј. c је или облика p^k (где је p прост број и $k \geq 2$) или облика $p^k \cdot q^l$ (где су p, q прости бројеви, $k, l \in \mathbb{N}$ и $\max\{k, l\} \geq 2$). Заиста, ако би c имао бар 3 проста фактора и био дељив са квадратом, тада би (за неке прсте p, q, r , неке $k, l, m \in \mathbb{N}$, $\max\{k, l, m\} \geq 2$ и $N \in \mathbb{N}$) било $c = p^k \cdot q^l \cdot r^m \cdot N \geq 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 60$.

1° Ако је c облика p^k , где је p прост број (то су бројеви 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49) по условима задатка мора бити $a = 1$ и $b = p$ (што је само 1 могућност за избор), тј. свака од 8 могућности за c једнозначно одређује a и b .

2° Ако је c облика $p^k \cdot q^l$, где су p и q прости бројеви (то су остали бројеви), тада се a и b могу изабрати на $\binom{4}{2} = 6$ начина (бира се 2 броја од бројева 1, p , q и $pq - a$ је мањи од та 2 броја), тј. свака од 11 могућности за c даје 6 различитих могућности за a и b .

Дакле, тражених избора има $8 \cdot 1 + 11 \cdot 6 = 74$.

2. Нека је N подножје нормале из M на AC . Тада је $\angle MNC = 90^\circ$, $\angle NCM = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$ и $\angle CMN = 30^\circ$, па је $CM = 2 \cdot CN$, тј. $\triangle BCN$ и $\triangle BMN$ су једнакокраки. Како је $\angle ABN = \angle BAN = 15^\circ$, и $\triangle ABN$ је једнакокраки, па је N центар описаног круга троугла ABM ($NA = NB = NM$).



ДР 08 1А 2

Дакле, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \angle BNM = \frac{1}{2} \cdot (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$, $\angle BMA = \frac{1}{2} \cdot \angle ANB = 75^\circ$ и $\angle ABM = 180^\circ - \angle BAM - \angle BMA = 45^\circ$.

3. Нека је $A(x) = x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$. Алгебарским трансформацијама се добија

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{2008} - x^{2007} - 3x + 3 + 1 = (x - 1)(x^{2007} - 3) + 1 \\ &= (x - 1)[(x^{2007} - 1) - 2] + 1 \\ &= (x - 1)[(x - 1)(x^{2006} + x^{2005} + \dots + x + 1) - 2] + 1. \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Нека је $B(x) = x^{2006} + x^{2005} + \dots + x + 1$. Полином $B(x)$ при дељењу са $x - 1$, на основу Безуове теореме, даје остатак $B(1) = 2007$. Следи $B(x) = (x - 1)Q(x) + 2007$, за неки $Q \in \mathbb{R}[x]$. Уврштавањем последње једнакости у (\spadesuit), добија се

$$A(x) = (x - 1)^3 Q(x) + 2007(x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1.$$

Дакле, тражени остатак је $2007(x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1 = 2007x^2 - 4016x + 2010$.

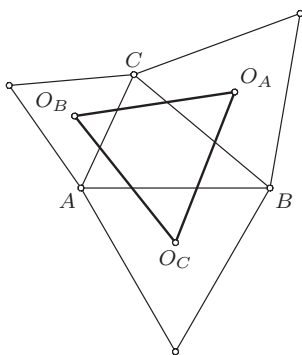
4. Лема. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 такве да су $\triangle CBA_1, \triangle ACB_1, \triangle ABC_1$ једнакостранични и немају заједничких унутрашњих тачака са $\triangle ABC$ и O_A, O_B, O_C , редом, њихови центри. Тада је $\triangle O_A O_B O_C$ једнакостраничан.

Доказ. Нека $\mathcal{R}_{X,\alpha}$ означава ротацију са центром у тачки X за угао α , а \mathcal{S}_x симетрију у односу на праву x . Како је $O_A B = O_A C$, $O_B C = O_B A$, $O_C A = O_C B$ и $\sphericalangle B O_A C = \sphericalangle C O_B A = \sphericalangle A O_C B = 120^\circ$, следи да је $\mathcal{R}_{O_A, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_B, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C, 120^\circ}$ директна изометријска трансформација са фиксном тачком B ($\mathcal{R}_{O_A, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_B, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C, 120^\circ}(B) = \mathcal{R}_{O_A, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_B, 120^\circ}(A) = \mathcal{R}_{O_A, 120^\circ}(C) = B$), па је то ротација са центром у B за угао $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$, тј. идентитет. Одавде следи да је $\mathcal{R}_{O_B, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C, 120^\circ} = \mathcal{R}_{O_A, 120^\circ}^{-1} = \mathcal{R}_{O_A, 240^\circ}$.

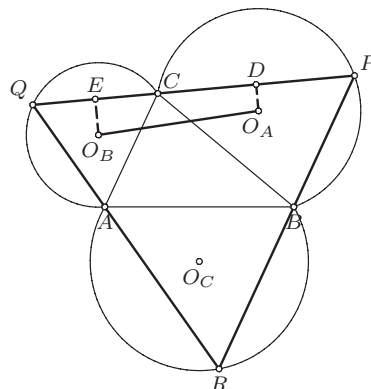
Нека је x права одређена тачкама O_B и O_C , $y_1 = \mathcal{R}_{O_C, -60^\circ}$ и $y_2 = \mathcal{R}_{O_B, 60^\circ}$. Тада је $\mathcal{R}_{O_B, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C, 120^\circ} = \mathcal{S}_{y_2} \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_{y_1} = \mathcal{S}_{y_2} \circ \mathcal{S}_{y_1} = \mathcal{R}_{X, 240^\circ}$, где је X пресечна тачка правих y_1 и y_2 , тј. тачка таква да је $\triangle X O_B O_C$ позитивно оријентисан једнакостраничан троугао (оријентисан $\sphericalangle(y_1, y_2)$ је 120° , па је угао ове ротације 240°).

Следи $\mathcal{R}_{O_A, 240^\circ} = \mathcal{R}_{O_A, 240^\circ}$, одакле је $O_A \equiv X$, па је $\triangle O_A O_B O_C$ једнакостраничан.

Напомена. Троугао $O_A O_B O_C$ је познат и као *Наполеонов троугао*.



ДР 08 1А 4-1



ДР 08 1А 4-2

Анализа. Нека су O_A, O_B, O_C дефинисане као у леми. Како је $\sphericalangle BPC = 60^\circ$, следи да тачка P припада геометријском месту тачака у равни из којих се дуж BC види под углом 60° , тј. кружном луку \widehat{BC} са центром

O_A , који је ван $\triangle ABC$. Аналогно, тачке Q и R припадају кружним луковима \widehat{CA} и \widehat{AB} , редом, са центрима у O_B и O_C , редом.

Нека је тачка P на луку \widehat{BC} . Нека су тачке Q и R пресечне тачке права PC и PB и лукова \widehat{CA} и \widehat{AB} , редом. Како је $\sphericalangle RPQ = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PQA = 60^\circ$, следи да је $Q - A - R$ и да је $\triangle PQR$ једнакостраничан, па треба одредити за коју тачку $P \in \widehat{BC}$ се добија троугао највеће стране.

Нека су D и E средишта дужи CP и CQ , редом. Тада је $CP = 2 \cdot CD$ и $CQ = 2 \cdot CE$. Одавде је $PQ = 2 \cdot (CD + DE) = 2 \cdot DE$. Како је трапез $O_B O_A D E$ правоугли (права која спаја центре круга и тетиве је нормална на тетиву) са $\sphericalangle O_A D E = \sphericalangle D E O_B = 90^\circ$, следи $O_A O_B \geq DE$. Дакле, PQ је највећа када је $O_A O_B = DE$, тј. када је $PQ \parallel O_A O_B$. Из леме следи да је тада и $QR \parallel O_B O_C$ и $RP \parallel O_C O_A$.

Конструкција. Нека су O_A, O_B, O_C конструисане као у лемима (конструирају се једнакостранични троуглови над странама троугла (ван троугла), а затим њихови центри) и нека су праве o_A, o_B, o_C праве које садрже A, B, C и које су паралелне са $O_B O_C, O_C O_A, O_A O_B$, редом. Тада је $P = o_B \cap o_C, Q = o_C \cap o_A, R = o_A \cap o_B$.

Доказ. Коректност конструкције следи из анализе.

Дискусија. Сваки корак конструкције је добро дефинисан и јединствен, па за сваки $\triangle ABC$ постоји јединствено решење.

5. Прости бројеви већи од 5 се завршавају неком од цифара 1,3,7,9, па се њихови четврти степени завршавају цифром 1. Следи да је цифра јединица броја $2p^4 + 3$, за $p \neq 2$ и $p \neq 5$, једнака 5, па је он дељив са 5 (а како је и већи од 5, следи да је овај број сложен). Провером, и бројеви $2 \cdot 2^4 + 3 = 35 = 5 \cdot 7$ и $2 \cdot 5^4 + 3 = 1253 = 7 \cdot 179$ су сложени.

Дакле за $n = 4$ и произвољан прост број p , број $2p^n + 3$ је сложен.

Напомена. Краће, за $(p, 5) = 1$ (тј. за $p \neq 5$) је $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$, одакле је $2p^4 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ (што уз $2p^4 + 3 > 5$) повлачи да је број $2p^4 + 3$ сложен.

Први разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned} (a+b)^6 - a^6 &= [(a+b)^3 + a^3] \cdot [(a+b)^3 - a^3] \\ &= [(a+b) + a] \cdot [(a+b)^2 - a(a+b) + a^2] \cdot [(a+b)^3 - a^3] \\ &= (a^2 + ab + b^2) \cdot (2a+b) \cdot [(a+b)^3 - a^3], \end{aligned}$$

следи тврђење задатка.

2. Како је $3^7 = 2187 = 45 \cdot 49 - 18 \equiv -18 \pmod{49}$ и $4^7 = 16384 = 334 \cdot 49 + 18 \equiv 18 \pmod{49}$, следи

$$3^{105} + 4^{105} = (3^7)^{15} + (4^7)^{15} \equiv (-18)^{15} + (18)^{15} = -18^{15} + 18^{15} = 0 \pmod{49}.$$

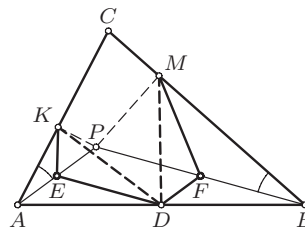
Како је $3^5 = 243 = 181 + 62 \equiv 62 \pmod{181}$ и $4^5 = 1024 = 6 \cdot 181 - 62 \equiv -62 \pmod{181}$, следи

$$3^{105} + 4^{105} = (3^5)^{21} + (4^5)^{21} \equiv (62)^{21} + (-62)^{21} = 62^{21} - 62^{21} = 0 \pmod{181}.$$

Дакле, број $3^{105} + 4^{105}$ је дељив и са 49 и са 181, па како је $(49, 181) = 1$, следи да је дељив и са $49 \cdot 181$ (Тангента 46, стр. 40, Писмени задаци, задатак 5).

3. Нека су E и F средишта дужи AP и BP , редом. Тада је E средиште хипотенузе правоуглог $\triangle APK$, па је $AE = KE = PE$ и $\sphericalangle PEK = 2 \cdot \sphericalangle PAC$. DF је средња линија $\triangle ABP$, па је $DF = \frac{1}{2} \cdot AP = PE$. Аналогно, F средиште хипотенузе правоуглог $\triangle PBM$, па је $MF = PF = BF$ и $\sphericalangle PFM = 2 \cdot \sphericalangle PBC$. DE је средња линија $\triangle ABP$, па је $DE = \frac{1}{2} \cdot BP = PF$.

Следи да је четвороугао $DEPF$ паралелограм, и $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DFP$, па је $\triangle KED \cong \triangle DFM$ (СУС, $KE = PE = DF$, $DE = PF = MF$, $\sphericalangle DEK = \sphericalangle PEK + \sphericalangle DEP = 2 \cdot \sphericalangle PAC + \sphericalangle DEP = 2 \cdot \sphericalangle PBC + \sphericalangle DFP = \sphericalangle PFM + \sphericalangle DFP = \sphericalangle DFM$), одакле је $DK = DM$.



ДР 08 1Б 3

4. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

5. Нека су војници означени бројевима од 1 до 12 по висини (тако да је 1 најнижи, а 12 највиши). На основу услова 2° и 3° следи да су у последњој врсти војници 9, 10, 11, 12 (и то тим редом слева на десно). Како је војник 8 највиши од престалих војника он мора да буде у другој врсти „скроз десно” (због услова услова 1° и 2°). Како је војник 1 најнижи он ће морати да буде у првој врсти „скроз лево” (због услова

услова 1° и 2°). Дакле, распоред војника је облика

1	?	?	?
?	?	?	8
9	10	11	12

Нека капетан поставља остале војнике по висини, почев од најнижег. Нека је сваком распореду војника додељен формални збир облика $1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, где избор знака $+$ испред i -те јединице одго-

вара постављању i -тог војника на прво слободно место у првом реду, а $-$ постављању i -тог војника на прво слободно место у другом реду (на овакав начин биће испуњен услов 2°). Како је и у првом и у другом реду слободно 3 места, збиру мора одговарати избор 3 знака $+$ и 3 знака $-$ (тј. не више од $\binom{6}{3}$ избора), уз ограничење да се не може поставити војник на место у другој колони ако је место „изнад” празно (да би био испуњен услов 1°), односно збир бројева до i -тог места увек мора бити ненегативан.

Ако је збир бројева у неком тренутку негативан у једном моменту мора бити једнак -1 , а на основу парности следи да се то може десити на или после треће или после пете јединице. Ако је збир после треће јединице -1 , тада је на прва два места изабран знак $-$, а на преостала 4 се произвољно распоређују 3 знака $+$ и један $-$, тј. оваквих избора има $\binom{4}{3}$. Аналогно, ако је збир после пете јединице -1 , тада је на последња два места изабран знак $+$, а на преостала 4 се произвољно распоређују 3 знака $-$ и један $+$, тј. оваквих избора има $\binom{4}{3}$. Међутим, низови код којих су и збир после треће и збир после пете јединице једнаки -1 су урачунати у оба претходна бројања. Тада је на прва два места изабран $-$, на последња два $+$, а на преостала два се произвољно распоређују један $+$ и један $-$, тј. оваквих низова има $\binom{2}{1}$.

Коначно, из претходног следи да је тражени број размештања

$$\binom{6}{3} - \left[\binom{4}{3} + \binom{4}{3} - \binom{2}{1} \right] = 14.$$

Напомена. Број низова из решења задатка је *Каталанов број* $C_4 = 14$ (Каталанов број је $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ за $n \in \mathbb{N}$). Због „малог” броја решења, до решења се може доћи и „грубом силом”. Сви распореди су:

1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 6	1 2 3 7
5 6 7 8	4 6 7 8	4 5 7 8	4 5 6 8
9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12
1 2 4 5	1 2 4 6	1 2 4 7	1 2 5 6
3 6 7 8	3 5 7 8	3 5 6 8	3 4 7 8
9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12
1 2 5 7	1 3 4 5	1 3 4 6	1 3 4 7
3 4 6 8	2 6 7 8	2 5 7 8	2 5 6 8
9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12
	1 3 5 6	1 3 5 7	
	2 4 7 8	2 4 6 8	
	9 10 11 12	9 10 11 12	

Други разред, А категорија

1. Како је $(n, n+1) = 1$ и $(n+1, n+2) = 1$, следи $(n+1, n(n+2)) = 1$, па је или $n+1 = x^2$ и $n(n+2) = y^2$ или $n+1 = -x^2$ и $n(n+2) = -y^2$ за неке $x, y \in \mathbb{N}_0$.

1° Ако је $n(n+2) = y^2$, следи $(n+1)^2 - 1 = n(n+2) = y^2$, па је $y = 0$ и $|n+1| = 1$, тј. $n \in \{-2, 0\}$.

2° Ако је $n(n+2) = -y^2$, следи $(n+1)^2 - 1 = n(n+2) = -y^2$, тј. $(n+1)^2 + y^2 = 1$, па је или $y = 1$ и $|n+1| = 0$ или $y = 0$ и $|n+1| = 1$, тј. $n \in \{-2, -1, 0\}$.