

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Четврти разред, А категорија

1. (а) Доказати да за $y \geq 2$ важи $2e^y > y^3 + 4$.
(б) Доказати да је функција $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x) = \ln \left(e^x + \frac{1}{x} - 1 \right)$$

конвексна.

2. У неправоуглом троуглу ABC , тачка H је ортоцентар, а тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C , редом. Нека је X пресек правих AH и EF , а Y пресечна тачка кружница описаних око троугла AHC и EBC , различита од C . Доказати да су тачке C, X и Y колинеарне.
3. Одредити последње две цифре броја $2^{2^p} + 1$, где је p прост број.
4. Нека је $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$. Одредити све полиноме p са целобројним коефицијентима, за које важи
- 1° $p(x) = p(\varepsilon x)$ за свако $x \in \mathbb{C}$;
 - 2° $p(1) = 2001$;
 - 3° $p(2) = 2009$.
5. Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7 , тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловац напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a , тако да једначина

$$x^3 - 3x^2 - 9x = a$$

има три реална и међусобно различита решења.

2. Дата је зарубљена купа у коју се може уписати лопта. Површина омотача те зарубљене купе је четири пута већа од разлике површина основа. Одредити однос запремина лопте и зарубљене купе.

3. Нека је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан са $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \dots$$

Доказати да је број S коначан и израчунати га.

4. Нека је P површина троугла, а R полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост

$$P \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

5. Одредити све вредности реалног параметра a за које је скуп решења неједначине

$$\log_{x+a}(x^2 + a^2) \geq 2$$

коначан.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

1° Ако је $p \in (1, 2]$, тада је $p - 1 > 0$, па једначина има бар једно позитивно решење ако и само ако је $\frac{2 + \sqrt{(2-p)(p+3)}}{p-1} > 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{(2-p)(p+3)} > 0$, што је тачно.

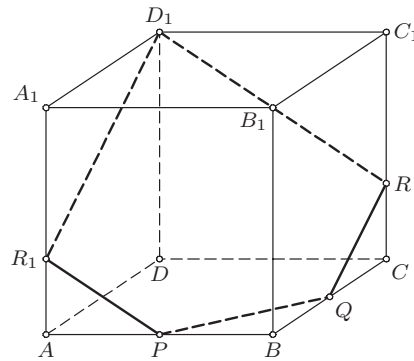
2° Ако је $p \in [-3, 1)$, тада је $p - 1 < 0$, па једначина има бар једно позитивно решење ако и само ако је $\frac{2 - \sqrt{(2-p)(p+3)}}{p-1} > 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{(2-p)(p+3)} < 0 \Leftrightarrow 4 < (2-p)(p+3) \Leftrightarrow (p-1)(p+2) < 0$, што је тачно ако је $p \in (-2, 1)$.

Дакле, полазна једначина има бар једно решење ако и само ако је $p \in (-2, 1) \cup \{1\} \cup (1, 2] = (-2, 2]$ (Тангента 51, стр. 49, Писмени задаци, задатак 1).

4. Нека је $a = 1$ и нека је коцка смештена у координатни систем, тако да су \vec{AB} , \vec{AD} и $\vec{AA_1}$ јединични вектори x , y и z осе, редом. У овом координатном систему је $P(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $Q(1, \frac{1}{2}, 0)$, $R(1, 1, \frac{1}{3})$, $\vec{PQ} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{PR} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3})$, $\vec{PQ} \times \vec{PR} = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$, па је равна која садржи тачке P , Q и R $2x - 2y + 3z = 1$. Ова равна садржи тачке $R_1(0, 0, \frac{1}{3})$ и $D_1(0, 1, 1)$, па како је пресек две непаралелне равни права, следи да је пресечна фигура коцке и равни PQR петоугао $PQRD_1R_1$.

Како је петоугао симетричан у односу на равна која садржи тачке B , B_1 , D , D_1 , следи да је његов обим $O = |\vec{PQ}| + 2 \cdot |\vec{QR}| + 2 \cdot |\vec{RD_1}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0} + 2 \cdot \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + 2 \cdot \sqrt{1 + 0 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{13}$.

Ако је φ угао између равни PQR и xy -равни, тада је $\cos \varphi = \frac{(0, 0, 1) \cdot (2, -2, 3)}{\|(0, 0, 1)\| \cdot \|(2, -2, 3)\|} = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Ако су P и P' површина неке фигуре и њене пројекције на неку равна, редом, и притом φ угао између равни у којој се налази фигура и равни у коју се пројектује,



ОК 09 3Б 4

тада је $\frac{P}{P'} = \frac{1}{\cos \varphi}$. Како се петоугао из задатка пројекцијом на xy -равна пројектује у петоугао $APQCD$ и важи $P(APQCD) = 1 - P(\triangle PBQ) = \frac{7}{8}$, следи да је $P(APQCD) = \frac{\frac{7}{8}}{\cos \varphi} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$.

Хомотетија са центром у A и коефицијентом a слика јединичну коцку у коцку ивице a . Како је однос дужина слике и оригинала једнак коефицијенту хомотетије, а однос површина слике и оригинала једнак квадрату коефицијента хомотетије, следи да је обим петоугла $APQCD$ једнак $a \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{13}\right)$, а површина $a^2 \cdot \frac{7\sqrt{17}}{24}$.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $g(x) = 2e^x - y^3 - 4$. Функција g је добро дефинисана и бесконачно пута диференцијабилна на $[2, \infty)$. Притом је $g'(y) = 2e^y - 3y^2$, $g''(y) = 2e^y - 6y$, $g'''(y) = 2e^y - 6$. Користећи $e^2 > 6$, редом следи:

- $g'''(y) \geq 2e^2 - 6 > 0$, тј. функција g'' је растућа на $[2, \infty)$;
- $g''(2) \geq 2e^2 - 12 > 0$; како је g'' је растућа на $[2, \infty)$, следи да је $g''(y) > 0$ за $y \in [2, \infty)$, па је функција g' растућа на $[2, \infty)$;

- $g'(2) \geq 2e^2 - 12 > 0$; како је g' је растућа на $[2, \infty)$, следи да је $g'(y) > 0$ за $y \in [2, \infty)$, па је функција g растућа на $[2, \infty)$;
- $g(2) \geq 2e^2 - 12 > 0$; како је g је растућа на $[2, \infty)$, следи да је $g(y) > 0$ за $y \in [2, \infty)$. Одавде се непосредно добија тврђење првог дела задатка.

Функција f је коректно дефинисана и два пута диференцијабилна на $(0, \infty)$, па је за други део задатка довољно показати да је $f''(x) > 0$ (за $x \in (0, \infty)$). На $(0, \infty)$ је

$$f'(x) = \frac{e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{e^{x+\frac{1}{x}} - 1} \text{ и}$$

$$f''(x) = \frac{\left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} \right] \cdot (e^{x+\frac{1}{x}} - 1) - e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$$

$$= \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \cdot \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^3} - e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \cdot \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right].$$

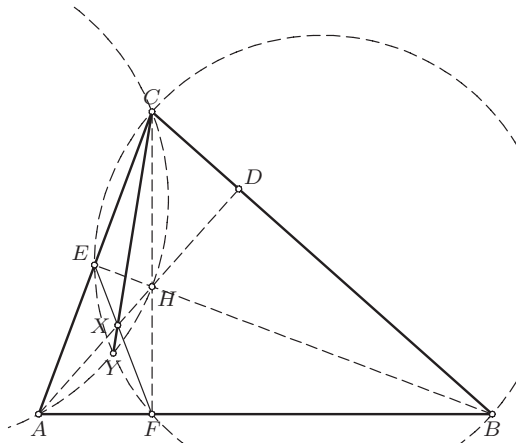
Како је $\frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} > 0$, довољно је доказати да је израз у последњој загради позитиван.

Како је $x + \frac{1}{x} \geq 2$ за $x \in (0, \infty)$, користећи неједнакост првог дела задатка, последње следи из

$$e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} > \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 4 \right] \cdot \frac{1}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}$$

$$= \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6} > 0.$$

2. Права CY је радикална оса описаних кругова $\triangle AHC$ и $\triangle EBC$, па је довољно доказати да X има исту потенцију у односу на ове кругове. Потенција тачке X односу на круг описан око $\triangle AHC$ је $XA \cdot XH$, а у односу на круг описан око $\triangle BCE$ је $XE \cdot XF$ (круг описан око $\triangle BCE$ је круг над пречником BC и садржи тачку F , јер је $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$). Како је четвороугао $AFHE$ тетиван ($\sphericalangle AFH = \sphericalangle HEA = 90^\circ$), из потенције тачке X у односу на описани круг овог четвороугла, следи $XE \cdot XF = XA \cdot XH$ (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, М754).



ОК094А2

Друго решење. Нека је \mathcal{I} инверзија са центром у C и полупречником $\sqrt{CA \cdot CE} = \sqrt{CD \cdot CB}$ (јер је четвороугао $ABDE$ тетиван ($\sphericalangle BEA = \sphericalangle BDA = 90^\circ$), а производ под кореном је потенција тачке C у односу на описани круг четвороугла $ABDE$). Како је и четвороугао $AFHE$ тетиван ($\sphericalangle AFH = \sphericalangle HEA = 90^\circ$), следи $CE \cdot CA = CF \cdot CH$, па је $\mathcal{I}(A) = E$, $\mathcal{I}(B) = D$, $\mathcal{I}(F) = H$. Следи да \mathcal{I} слика праву EF у описани круг $\triangle AHC$, а праву AH у описани круг $\triangle CEF$ (односно описани круг $\triangle CEB$).

Дакле, тачка X (пресек правих EF и AH) са \mathcal{I} се слика у Y (пресек одговарајућих кругова), па су тачке X , Y и центар инверзије (C) колинеарне.

3. Треба одредити остатак броја $x = 2^{2^p} + 1$ при дељењу 100, тј. при дељењу са 4 и при дељењу са 25. Како је $2^p > 1$, следи $4 \mid 2^{2^p}$, па је $x \equiv 1 \pmod{4}$. Ако је $p > 2$ прост број, он је непаран. Нека је $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Следи $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot (-1)^k \pmod{5}$, па је $2^p \equiv 2 \pmod{5}$ ако је k парно, односно $2^p \equiv 3 \pmod{5}$ ако је k непарно. Такође је $2^p \equiv 0 \pmod{4}$, па је или $2^p \equiv 12 \pmod{20}$ или $2^p \equiv 8 \pmod{20}$ (по кинеској теореме о остацима, претходни системи једначина имају јединствено решење у систему остатака по модулу 20).

На основу Ојлерове теореме је $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ (важи $(2, 25) = 1$), па је

$$\text{или } x \equiv 2^{2^p} + 1 \equiv 2^{12} + 1 = 4097 \equiv 22 \pmod{25}$$

$$\text{или } x \equiv 2^{2^p} + 1 \equiv 2^8 + 1 = 257 \equiv 7 \pmod{25}.$$

Пошто је и $x \equiv 1 \pmod{4}$, ако је $p > 2$ важи или $x \equiv 97 \pmod{100}$ или $x \equiv 57 \pmod{100}$ (по кинеској теореме о остацима, претходни системи једначина имају јединствено решење у систему остатака по модулу 100).

Дакле, ако је p непаран прост број, остатак при дељењу x са 100 једнак је или 57 или 97 или 17 (ово у случају $p = 2$), одакле се добија одговор на питање задатка.

4. Нека је $p(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$ ($k = \deg p$). Из услова је $p(x) = p(\varepsilon x) = p(\varepsilon^2 x)$ (за свако $x \in \mathbb{C}$), па је

$$p(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^k a_n x^n (1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n}) = \sum_{\substack{3 \mid n \\ 0 \leq n \leq k}} a_n x^n$$

(јер је $1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} = 0$ ако $3 \nmid n$, односно $1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} = 3$ ако $3 \mid n$).

За целе m, n и $k \in \mathbb{N}_0$ важи $m^3 - n^3 \mid m^{3k} - n^{3k}$, па следи $m^3 - n^3 \mid p(m) - p(n)$, одакле $2^3 - 1^3 = 7 \mid p(2) - p(1) = 8$, што је немогуће.

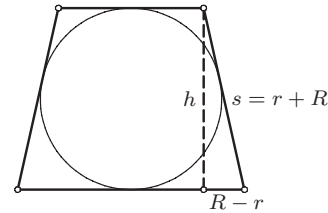
Дакле, не постоји полином са наведеним особинама.

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, је диференцијабилна на \mathbb{R} и важи $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, па строго расте на $(-\infty, -1)$ и на $(3, \infty)$, а строго опада на $(-1, 3)$. На сваком интервалу строге монотоности f може узимати фиксну вредност највише једном, па је број решења једначине $f(x) = a$ највише 3 и једнак је 3 ако ова једначина има по једно решење на сваком од интервала монотоности. Како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 5$, $f(3) = -27$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, следи да је $f(-\infty, -1) = (-\infty, 5)$, $f(-1, 3) = (-27, 5)$, $f(3, \infty) = (-27, \infty)$, па једначина $f(x) = a$ има три различита решења ако и само ако је $a \in (-27, 5)$ (Тангента 52, стр. 44, Писмени задаци, задатак 1).
2. Нека је r полупречник мање, а R поупречник веће основице купе и $\alpha = \frac{r}{R}$. Нека је s изводница, а h висина купе. Осни пресек купе је једнакокраки трапез у који се може уписати кружница. Како су краци тог трапеза s , а дужине основица $2r$ и $2R$, следи $2s = 2r + 2R$, тј. $s = r + R$. Из податка о површини омотача следи $4(R^2 - r^2)\pi = (R + r)s\pi = (R + r)^2\pi$, одакле је $4(R - r) = R + r$, тј. $\alpha = \frac{3}{5}$. Из Питагорине теореме је $h^2 = s^2 - (R - r)^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4rR = 4R^2\alpha$.

Полупречник лопте уписане у купу једнак је половини висине купе (трапеза), па је њена запремина $V_L = \frac{4}{3} \cdot (R\sqrt{\alpha})^3 \pi = \frac{4R^3\pi}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}$. Запремина купе је $V_K = \frac{h\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \frac{2R^3\pi}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)$. Коначно, $\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}}{\frac{2R^3\pi}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha + \alpha^2} = \frac{30}{49}$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 1).



OK 09 4B 2

3. Из везе којом је дефинисан низ се добија $x_4 = 2, x_5 = 1, x_6 = 2, x_7 = 3, x_8 = 2$. Индукцијом је $x_{n+4} = x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Заиста, база индукције је садржана у горњам рачуну. Нека је тврђење тачно за све чланове низа чији је индекс не већи од $n + 4$ ($n \geq 3$). Тада је $x_{n+5} = x_{n+4} - x_{n+3} + x_{n+2} = x_n - x_{n-1} + x_{n-2} = x_{n+1}$. Дакле, важи $x_{2k} = 2$ за свако $k \in \mathbb{N}$; $x_{4k+1} = 1$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$; $x_{4k+3} = 3$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$.

Ред из задатка је ред са позитивним члановима, па је могуће пермутовати његове чланове.

Како је $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ за $|q| < 1$ (збир геометријске прогресије), следи

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} &= 1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+3}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^4}} + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{81}{80} + \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

4. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.
5. Ако је $a = 0$, за свако $x > 0, x \neq 1$ важи $\log_x x^2 = 2$, па је (у овом случају) $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ скуп решења неједначине (и он је бесконачан).

Нека је $a \neq 0$. Неједначина има смисла за $x \in (-a, 1-a) \cup (1-a, \infty)$.

1° Ако је $x \in (-a, 1-a)$, тада је $0 < x+a < 1$, а полазна неједначина је еквивалентна са $x^2 + a^2 \leq (x+a)^2$, односно са $0 \leq ax$. Ако је $a > 0$ решења су $x \in [0, \infty) \cap (-a, 1-a)$, па за $1-a > 0$ неједначина има бесконачно много решења, док за $1-a \leq 0$ нема решења. Ако је $a < 0$ решења су $x \in (-\infty, 0] \cap (-a, 1-a) = \emptyset$, па за овакве вредности параметра a нема решења.

2° Ако је $x \in (1-a, \infty)$, тада је $1 < x+a$, а полазна неједначина је еквивалентна са $x^2 + a^2 \geq (x+a)^2$, односно са $0 \geq ax$. Ако је $a > 0$ решења су $x \in (-\infty, 0] \cap (1-a, \infty)$, па за $1-a < 0$ неједначина има бесконачно много решења, док за $1-a \geq 0$ нема решења. Ако је $a < 0$ решења су $x \in [0, \infty) \cap (1-a, \infty) = (1-a, \infty)$ (тј. у овом случају има бесконачно много решења).

Из 1° следи да полазна неједначина има бесконачно много решења ако је $a \in (0, 1)$. Из 2° следи да полазна неједначина има бесконачно много решења ако је $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Из 1° и 2° следи да полазна неједначина нема решења ако је $a = 1$.

Дакле, јединствена вредност параметра a за коју полазна неједначина има коначан скуп решења је $a = 1$.