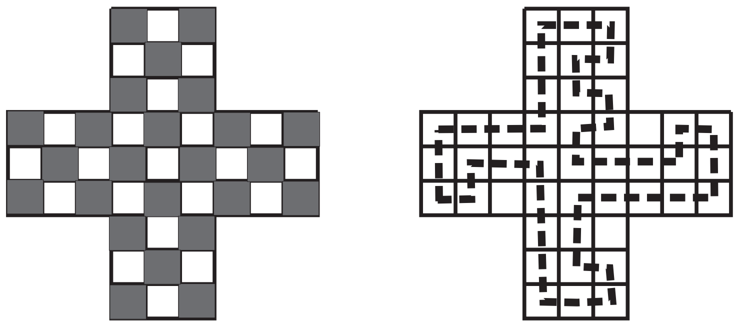
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Трећи разред – А категорија

1. Замак има форму неконвексног 12-тоугла (као на слици) са укупно 45 квадратних одаја. Између сваке две одаје које имају заједнички зид постоје врата. Туриста креће из неке одаје и жели да обиђе што више одаја и да се врати у полазну одају, али тако да у сваку одају уђе највише једанпут. Колико највише одаја он може овако да посети?



Решење: На слици се види тура туристе којом се обилази 42 одаје. Докажимо да туриста не може посетити више одаја под датим условима. Обојимо одаје црно-бело (шаховски) тако да има 24 црне и 21 белу одају. Како туриста пролази суседним одајама које су различито обојене на његовој тури има исти број белих и црних одаја. Зато на свакој тури нема више од $21+21=42$ одаје.

2. Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm ... \pm x \pm 1$ који имају све корене реалне.

Решење: Нека су $x_1, ..., x_n$ корени полинома $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ где је $a_i = \pm 1$. У случају $n = 1$ лако се налазе два решења $x \pm 1$ па зато претпоставимо да је $n > 1$. Користећи Виетове формуле имамо

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = (x_1+...+x_n)^2-2(x_1x_2+...+x_{n-1}x_n) = a_{n-1}^2-2a_{n-2} = 1\pm 2.$$

Како су по услову задатка сви корени реални, збир квадрата мора бити позитиван, па имамо да је $x_1^2+...+x_n^2 = 3$, тј. $a_{n-2} = -1$. Слично је и $x_1^2x_2^2\cdots x_n^2 = a_0^2 = 1$. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо:

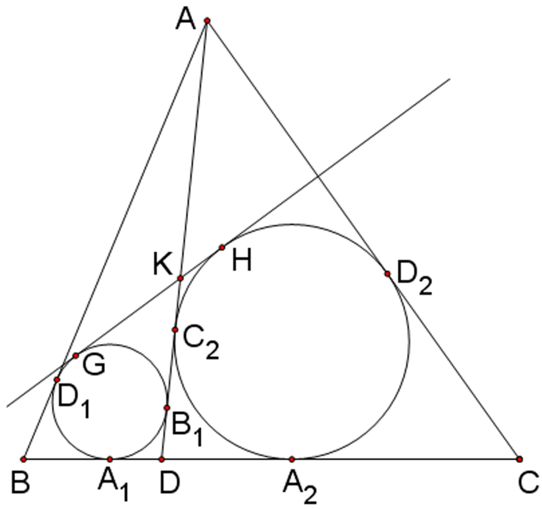
$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}(x_1^2+...+x_n^2) \geqslant \sqrt[n]{x_1^2\cdots x_n^2} = 1$$

одакле је $n \leqslant 3$, при чему једнакост $n = 3$ важи акко $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$. Одатле добијамо за случај $n = 3$ два решења $(x^2-1)(x\pm$

1). У случају $n = 2$ лако се добијају још два решења $x^2 \pm x - 1$, док у случају $n = 1$ имамо такође два решења $x \pm 1$.

3. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

Решење: Означимо са A_1, B_1, D_1 тачке у којима уписани круг у троугао ABD додирује странице BD, AD, AB; и означимо са A_2, C_2, D_2 тачке у којима уписани круг у троугао ACD додирује странице CD, AD, AC. Нека је $AC = b$, $AB = c$, $BD = u$, $DC = v$ и $AD = d$. Нека су G и H тачке у којима заједничка спољашња тангента различита од BC додирује кругове уписане у троуглове ABD и ACD.



Тада је

$$\begin{aligned}2AK &= (AB_1 - GK) + (AC_2 - HK)\\ &= AB_1 + AC_2 - GH\\ &= AD_1 + AD_2 - A_1A_2\\ &= AD_1 + AD_2 - DA_1 - DA_2.\end{aligned}$$

Међутим, $AD_1 = \frac{c+d-u}{2}$, $AD_2 = \frac{b+d-v}{2}$, $DA_1 = \frac{d+u-c}{2}$, $DA_2 = \frac{d+v-b}{2}$. Заменом добијамо

$$2AK = \frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2} = b+c-u-v = AC+AB-BC,$$

односно $AK = (AB + AC - BC)/2$, што зависи само од дужина страница троугла ABC. □

4. Наћи све природне бројеве n мање од 100 којима је збир цифара у декадном запису једнак збиру цифара у бинарном запису.

Решење: Означимо редом са $S_{10}(n)$ и $S_2(n)$ збир цифара природног броја n у декадном, односно бинарном систему. Како је $n < 100 < 2^7$, то број n у бинарном систему има највише 7 цифара, па је $S_2(n) \leqslant 7$. Нека је $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ запис броја n у бинарном систему, тако да он може да почиње и одређеним бројем нула. Како је тада $n = a_6 \cdot 2^6 + a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, то је $n \equiv_3 (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5)$. Одавде, како је $n \equiv_3 S_{10}(n) \equiv_3 S_2(n) = (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5)$, налазимо да је $2(a_1 + a_3 + a_5) \equiv_3 0$, односно $a_1 + a_3 + a_5 \in \{0, 3\}$ (јер је $0 \leqslant a_1 + a_3 + a_5 \leqslant 3$). Дакле, за природан број n важи да су бинарне цифре a_1, a_3 и a_5 једнаке међу собом. Сада разликујемо два случаја:

1° $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Сада је $S_2(n) \leqslant 4$. Зато је $a_6 = 0$, јер би у супротном било $n \geqslant 64$ одакле је $S_{10}(n) \geqslant 7$, што је немогуће. Дакле, $S_2(n) \leqslant 3$, $n \leqslant 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ и $n \equiv_4 a_0 \in \{0, 1\}$, те је $n \in \{21, 20, 12, 2, 1\}$. Провером добијамо да су решења $n = 1$, $n = 20$ и $n = 21$.

2° $a_1 = a_3 = a_5 = 1$. Зато је $n \geqslant 2^5 + 2^3 + 2^1 = 42$, па је $S_{10}(n) \geqslant 5$. Приметимо да је $a_6 = 0$, јер би у супротном било $n \geqslant 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 106$. Зато је и $S_{10}(n) \leqslant 6$. Из овога закључујемо да је $n \in \{60, 51, 42, 50\}$. Провером добијамо да ни један број из овог скупа није решење.

Једине вредности природног броја n, $n < 100$ који задовољавају услов задатка су $n = 1$, $n = 20$ и $n = 21$.

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$.

Тангента 34, М340

Решење: Уведимо ознаку $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ одакле следи $a^2 = 2 + \sqrt{3}$. Овом сменом наша једначина добија облик

$$a^{2x} + 1 = (2a)^x.$$

Бројеви $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ су решења једначине $x^2 - 4x + 1 = 0$ одакле добијамо једнакост

$$a^4 + 1 = 4a^2.$$

Упоређивањем закључујемо да је $x = 2$ једно решење наше једначине. То је и једино решење. Заиста, дељењем са $(2a)^x$ добијамо да је наша једначина еквивалентна са

$$\left(\frac{a}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2a}\right)^x = 1.$$

На левој страни је функција од x која монотоно опада; ово следи из чињенице да је $\frac{a}{2} < 1$ и $\frac{1}{2a} < 1$. Закључујемо да може постојати највише једна вредност x за коју та функција узима вредност 1.

Закључак: Једино решење наше једначине је $x = 2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

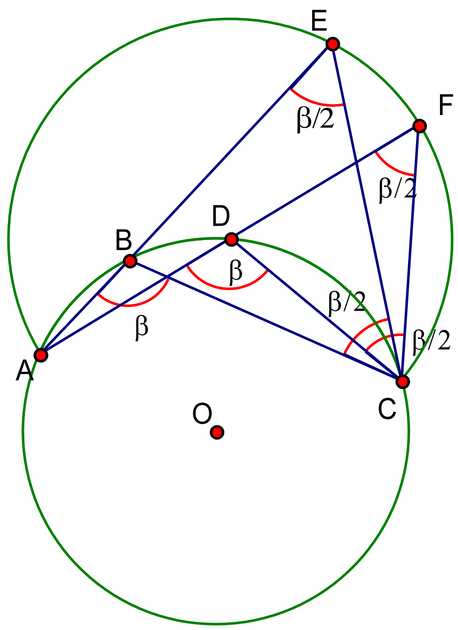
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

Решење 1: Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. По синусној теореми $AB+BC = 2R(\sin\alpha+\sin\gamma) = 4R\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Максимум овог израза се постиже за $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 1$, тј. $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$. Дакле, $AB = BC = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\beta}{2}$, а максималан збир износи $4R\cos\frac{\beta}{2}$.



Решење 2: Продужимо дуж AB до тачке E тако да важи $BE = BC$, односно $AE = AB+BC$. Троугао BCE је једнакокрак, а како је $\sphericalangle ABC = \beta$ спољашњи за овај троугао следи да је $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ECB = \frac{\beta}{2}$. Конструишимо тачку D на задатој кружници тако да је $AD = DC$ и $\sphericalangle ADC = \beta$. Поновимо поступак за тачку D као и за тачку B. Конструишимо тачку F тако да важи $DC = DF$, односно $AF = AD + DC$. На исти начин важи да је $\sphericalangle DFC = \sphericalangle FCD = \frac{\beta}{2}$. Тачке E и F припадају геометријском месту тачака из којих се дуж AC види под углом $\frac{\beta}{2}$ (али са исте стране праве AC са које су B и D). Геометријско место тачака је лук са центром у тачки D. Пошто је пречник најдужа тетива, онда

следи да је максималан збир тетива у случају тачке D односно када је $AB = BC$.

2. За које вредности реалног параметра p једначина

$$\frac{\log px}{\log(x+1)} = 2$$

има јединствено решење?

Решење: Једначина је еквивалентна са

$$px > 0, \quad x > -1, \quad x+1 \neq 1, \quad px = (x+1)^2,$$

тј. са

$$px > 0, \quad x > -1, \quad x^2 + (2-p)x + 1 = 0. \tag{$*$}$$

Имамо два случаја:
Први случај: Квадратна једначина има јединствени корен тј. $(2-p)^2 = 4$, одакле је $p = 0$ или $p = 4$. Решење $p = 0$ не задовољава први услов, а за $p = 4$ имамо јединствено решење $x = 1$.
Други случај: Квадратна једначина има два корена x_1, x_2, од којих само један задовољава услове (*). Из услова да је дискриминанта квадратне једначине $D = (2-p)^2 - 4$ већа од нуле, добијамо $p > 4$ или $p < 0$. Решавањем квадратне једначине добијамо решења $x_{1,2} = \frac{1}{2}(p - 2 \pm \sqrt{(p-2)^2 - 4})$. Када је $p > 4$, имамо да су оба решења позитивна, па оба задовољавају услове (*) и тада немамо јединствено решење. Када је $p < 0$ имамо да су оба решења негативна, међутим како је $f(-1) = p < 0$, где је $f(x) = x^2 + (2-p)x + 1$, имамо да је -1 између корена једначине, тј. само једно решење задовољава други услов (*), па у том случају полазна једначина има једниствено решење.

Дакле решење је $p \in (-\infty, 0) \cup \{4\}$.

3. Нека је $AB = 6\sqrt{2}$ ивица квадратне основе правилне пирамиде $ABCDV$ и $TV = 3$ њена висина, где је T пресек дијагонала квадрата $ABCD$. Израчунати угао између праве ℓ одређене са дужи TH и равни α троугла ABV, где је H ортоцентар троугла ABV.

Решење 1: Ако је S средина странице AB, тада редом имамо да је $AS = 3\sqrt{2}$, $AV = 3\sqrt{5}$, $VS = 3\sqrt{3}$ и из сличности троуглова HSA и ASV следи $\frac{HS}{AS} = \frac{AS}{VS}$ тј. $HS = 2\sqrt{3}$ и $HV = SV - HS = \sqrt{3}$. Како је угао $\sphericalangle TVS$ заједнички за троуглове STV и THV и како је $\sqrt{3} = \frac{SV}{TV} = \frac{TV}{HV} = \sqrt{3}$ следи да су троуглови STV и THV слични, па је тражени угао $\sphericalangle THV = \sphericalangle STV = \frac{\pi}{2}$.

Решење 2: Поставимо дату пирамиду у координатни систем тако да је на пример $A(6,0,0), B(0,6,0), V(0,0,3)$ и $T(0,0,0)$. Како је $AH \perp BV$ и $AC \perp BV$ то је раван $\beta = \beta(A, C, H) \perp BV$. Аналогно је и $\gamma = \gamma(B, D, H) \perp AV$. Према томе ортоцентар H мора припадати свакој од равни α, β и γ тј. $H \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Како је $\alpha : x + y + 2z = 6$, $\beta : -2y + z = 0$ и $\gamma : -2x + z = 0$, то решење овог система једначина представља координате отоцентра H, па је $H(1, 1, 2)$. Сада имамо да скаларни производ вектора $\overrightarrow{TH}$ и $\overrightarrow{SV}$ је $\overrightarrow{TH} \cdot \overrightarrow{SV} = (1, 1, 2)(-3, -3, 3) = 0$, што значи да је $\overrightarrow{TH} \perp \overrightarrow{SV}$ тј. $\ell \perp \alpha$, па је тражени угао $\frac{\pi}{2}$.

Решење 3: За **сваку** праву правилну четворострану пирамиду важи да је тражени угао $\frac{\pi}{2}$. Како је $AC \perp BV$ то постоји раван β која садржи AC и нормална је на BV и њој очевидно припада висина троугла ABV која полази из темена A. Како је $AC \perp BV$ то постоји раван β која садржи BD и нормална је на AV и њој очевидно припада висина троугла ABV која полази из темена B. Према томе ортоцентар H троугла ABV припада пресеку равни α и β. Како су обе равни α и β нормалне на раван троугла ABV тј. на раван α, то је и њихова пресечница нормална на α, а њој очевидно припада ортоцентар H па је тражени угао $\frac{\pi}{2}$.

4. Решити систем једначина

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_1 + d + b_1 q = 21 \quad a_1 + 2d + b_1 q^2 = 22 \quad a_1 + 3d + b_1 q^3 = 29.$$

где су a_1, b_1, d и q непознати реални бројеви.

Тангента 38, стр. 42

Решење: Одузимањем прве од друге, друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad d + b_1 q(q-1) = 1 \quad d + b_1 q^2(q-1) = 7.$$

Одузимањем друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad b_1(q-1)^2 = 3 \quad b_1 q(q-1)^2 = 6.$$

Пошто су вредности $b_1 = 0$ и $q = 1$ искључене, дељењем четврте са трећом једначином коначно добијамо еквивалентан систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad b_1(q-1)^2 = 3 \quad q = 2.$$

Решење последњег а тиме и нашег система је

$$q = 2 \quad b_1 = 3 \quad d = -5 \quad a_1 = 20.$$

5. Решити неједначину

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Тангента 38, стр. 43

Решење: Из адиционе теореме за синус налазимо да је

$$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \quad \text{и} \quad \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Разломак је позитиван ако и само ако су му и бројилац и именилац истог знака.

Први случај:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin(2x + \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Прва једначина је еквивалетна са

$$k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$$

а друга са

$$m\pi < x < \frac{\pi}{4} + m\pi \, (m \in \mathbb{Z}).$$

Оба услова су задовољена ако и само ако је $x \in (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$.

Други случај:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Прва једначина је еквивалетна са

$$\frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$$

а друга са

$$\frac{\pi}{4} + m\pi < x < \pi + m\pi \, (m \in \mathbb{Z}).$$

Оба услова су задовољена ако и само ако је $x \in (\frac{3\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$ или што је еквивалетно ако и само ако је $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$.

Решење:

$$x \in (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$